Unidad curricular: DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA III

Nombre de la propuesta

"Discusiones en torno a los sentidos y significados del Análisis Matemático y de su enseñanza en el Nivel Secundario"

Objetivos

- Incorporar aportes de la didáctica de la Matemática para reflexionar acerca del sentido de los conocimientos matemáticos en el estudio del Análisis Matemático.

- Profundizar el análisis de los principales problemas relativos a la enseñanza del Análisis Matemático en el Nivel Secundario, proponiendo intervenciones que atiendan a estas problemáticas.

- Comprender la importancia del dominio y uso significativo del lenguaje matemático.

Fundamentación

La clarificación de los conceptos fundamentales de la disciplina, el estudio de las dificultades que encierra su aprendizaje, la obtención de actitudes positivas frente al conocimiento, etc. exigen una didáctica que supera la mera formación académica. No se trata simplemente de estudiar Matemática con mayor profundidad, ni tampoco de centrarse casi exclusivamente en una preparación psicopedagógica general al margen del cuerpo de conocimientos específico. Se trata de abrir espacios para teorizar y analizar la problemática didáctica vinculada con la Enseñanza de la Matemática, con reflexiones que no han de romper el hilo conductor de la disciplina y que se constituyen en una ocasión privilegiada para ver "en acto" la tarea del análisis didáctico.

Desde esta perspectiva se propone el abordaje teórico e instrumental de la enseñanza de la Matemática relacionada al espacio áulico en el Nivel Secundario y vinculada al Análisis Matemático. Su inclusión en la formación docente favorece el tratamiento conceptual y práctico del conjunto de problemáticas propias de la enseñanza de la Matemática y pretende responder a las preguntas ¿qué enseñar?, ¿para qué enseñar?, ¿cómo enseñar?, ¿cuál es el sentido y las implicancias socioeducativas de la evaluación en Matemática? , entre otras. Se propone además complementar este estudio con el análisis y la reflexión en torno a la influencia de las concepciones previas de los alumnos en el proceso de aprendizaje y el tratamiento de las preconcepciones propias vinculadas con la ciencia y su enseñanza.

De acuerdo con las palabras de Dreyfus (1991), "comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante" y es el resultado de "una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales". Estos procesos mentales involucrados se visualizan a través de distintas representaciones. Es por ello que se trabajará con las nociones desarrolladas en la teoría de los registros de representación semiótica.

Descripción de la propuesta

La propuesta está estructurada en tres ejes en los cuales se abordan los sentidos y significados de los objetos relacionados con el estudio de funciones y el análisis matemático, los errores, dificultades y obstáculos asociados al aprendizaje en este campo, y el análisis de propuestas de enseñanza presentadas en libros o sugeridas en los actuales diseños curriculares con enfoques que incluyen líneas de investigación relevantes en el campo de la Didáctica de la Matemática. Cada uno de estos ejes está desarrollado en etapas, con el fin de tener cierres parciales a cada temática específica. Cada etapa incluye las actividades acompañadas con un apartado denominado "Descripción de la tarea" en donde se incluye el propósito de las actividades y sugerencias de trabajo con los estudiantes pensando en la alternancia entre presenciales e instancias virtuales. Se puede evaluar cada etapa a través de la presentación de informes escritos, presentaciones orales, producciones grupales e individuales, participación en foros, etc.

Se prevé el desarrollo de los ejes según el siguiente cronograma:

Eje	Etapa	Mes	Cant semanas
Estudio didáctico del tratamiento de funciones	Las funciones como objeto de estudio	Abril	2 semanas
	Las funciones como objeto de enseñanza	Abril	2 semanas
Registros de representación semiótica	El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza de la Matemática	Mayo	2 semanas
Estudio didáctico del Análisis Matemático	Aproximaciones intuitivas y experimentales: el sentido de la razón de cambio y la acumulación.	Mayo	2 semanas
	Diferentes paradigmas y tendencias actuales en la enseñanza del Análisis Matemático	Junio	3 semanas

ACTIVIDADES

Primer eje: Estudio didáctico del tratamiento de funciones.

El propósito de este eje es el de reflexionar (y reconstruir) los sentidos y significados de los objetos matemáticos presentes en relación al estudio de funciones. Se propone un recorrido desde el trabajo de las funciones como objeto de estudio, a la consideración de las funciones como objeto de enseñanza.

Primera etapa: Las funciones como objeto de estudio. Resolución de actividades, confrontación y validación de las estrategias de resolución.

Actividad 1

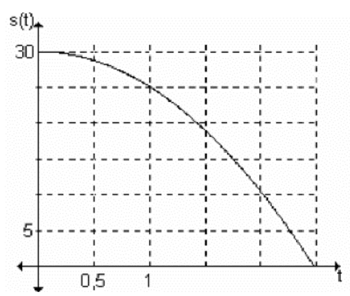
Realice las siguientes actividades: ¿Qué objetivo/s tendrá cada actividad? ¿Qué saberes se ponen en juego?

1. Exprese en lenguaje matemático los intervalos de variación presentes en cada situación:

a) El área “a” de un círculo aumenta de manera que siempre es mayor que 2 cm2.

b) La temperatura “t” del cuerpo de un hombre sano varía desde 36,8ºC hasta 37,1ºC.

2. Los químicos miden la acidez y alcalinidad de una sustancia con el pH (potencial hidrógeno). La escala usada es de 0 a 14. Una sustancia es ácida si su pH es menor que 7. Si es de 7 es neutra y si sobrepasa este valor es alcalina. Describa los intervalos de pH correspondientes a la variación de la acidez y alcalinidad con desigualdades y represente en la recta numérica.

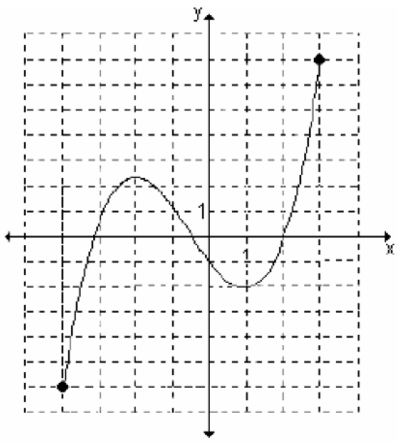


3. Una piedra es lanzada desde lo alto de un edificio de 30 metros de altura. Su posición a los t segundos de ser lanzada se describe con la función de la gráfica. Responda:

a) ¿Qué es lo que cambia en la situación planteada?

b) ¿Cuál es el intervalo de tiempo en que la piedra permanece en el aire?

c) ¿Cuál es el intervalo de variación de la altura de la piedra?



4. Analice la función cuya gráfica se muestra y responda:

a) ¿Cuál es el intervalo de variación de x?

b) ¿Cuál es el intervalo de variación de y?

c) ¿Para qué valores de x, y > 0?

d) ¿Para qué valores de x, y < 0?

e) ¿Para qué valores de x, y = 0?

f) ¿Para qué valores de x, y crece?

g) ¿Para qué valores de x, y decrece?

h) ¿Para qué valores de x, y no crece ni decrece?

5. Al abrir una canilla de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado corriendo. La temperatura inicial está cercana a la ambiente, debido al agua que ha estado en los tubos. Cuando empieza a salir agua caliente, la temperatura aumenta con rapidez. A partir de ahí, la temperatura se mantiene constante. Cuando la canilla se cierra, la temperatura decrece hasta alcanzar la temperatura de la alimentación del agua. Realice un bosquejo aproximado de la temperatura T en función del tiempo t.

6. Las variables x e y están relacionadas de modo que y queda determinada si a cualquier valor de x se lo duplica y al resultado se le suma tres. Escriba una ley para y en función de x.

7. Cada una de las tablas muestra valores numéricos para cada variable representada. Determine la ecuación que relaciona a las variables en cada una de ellas.

x	1	2	3	…
f(x)	3	6	9	…

p	1	2	3	…
q(p)	1	4	9	…

r	0,2	0,5	1	1,5	3	…
t(r)	5	2	1	2/3	1/3	…

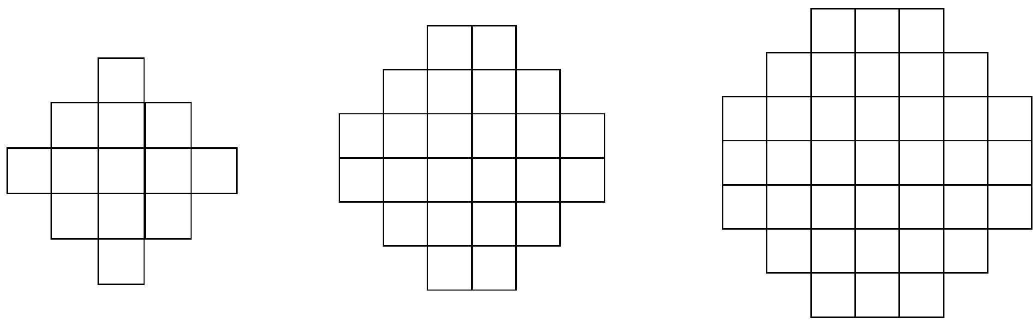
8. Sea la función y = f(x) = 1/2 x − 4.

a) Exprese la ley que determina la dependencia entre las dos variables con sus palabras.

b) Determine f(0), f(−2) y f(6).

9. Baldosas

Los siguientes dibujos se han armado a partir de cuadrados a los que se le agregan baldosas, en cada lado, en una cantidad de dos menos que las que tiene el lado:

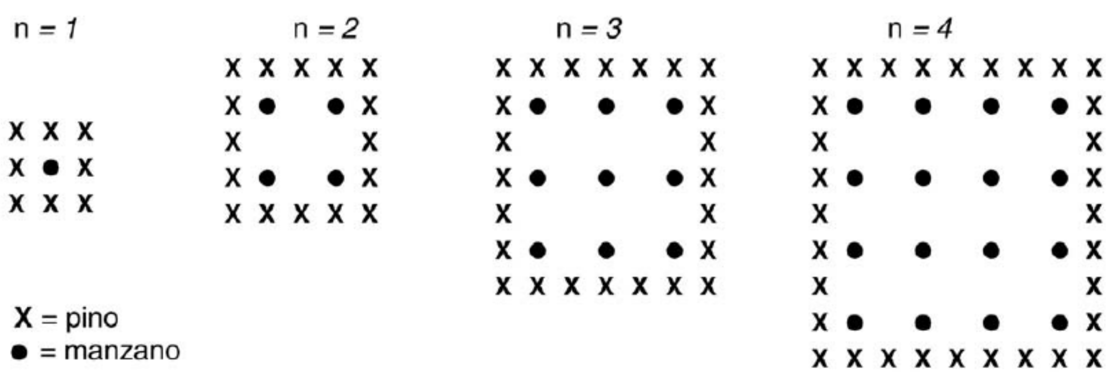


n = 1 *n = 2* *n = 3*

¿Para qué valor de n, el dibujo tendrá 472 cuadraditos? ¿Y 875?

10. Manzanos y pinos

Un agricultor planta manzanos en un esquema cuadrado. Para proteger los árboles del viento, planta pinos alrededor de todo el huerto. Aquí ves el diagrama de esta situación, donde se presentan los cuadrados de manzanos y de pinos para cualquier número (n) de filas de manzanos:



Supongamos que el agricultor quiere hacer un huerto mucho más grande, con muchas filas de árboles. A medida que el agricultor agranda el huerto, ¿qué aumentará más rápidamente: el número de manzanos o el número de pinos? Explique cómo encontró su respuesta.

Descripción de la tarea

Las actividades que se proponen toman la temática “funciones” como centro de un análisis crítico reconociendo a tal temática como objeto de conocimiento.
El objetivo de la Actividad 1 es que los estudiantes reconozcan las nociones relacionadas al tratamiento de funciones al aplicarlas en la resolución de problemas. Esta primera actividad además sirve para establecer un diagnóstico de las nociones sobre funciones. Se pretende que los estudiantes confronten respuestas, analicen las distintas estrategias de resolución y validen las repuestas.
La resolución de estas tareas llevará al replanteo además de la forma de expresar la relación entre las variables, tipo de notación establecida, restricciones del dominio y/o imagen de una función, etc.
En el caso del problema 9, la discusión debe llevar a la necesidad de establecer como conjunto de partida y llegada los números naturales, reconociendo las funciones discretas.
El problema 10 trabaja el concepto de “velocidad de crecimiento” y la relación entre crecimiento de la función lineal comparado con crecimiento de función cuadrática. Aquí es importante el tipo de representación que ayuda a llegar a la respuesta: representación gráfica, reconocer la regularidad para distintos valores de n para ambas funciones, etc.

Actividad 2

Defina función.
Comparta con sus compañeros las definiciones propuestas. ¿Son equivalentes? ¿Qué conceptos privilegia o deja explícita cada definición? Enumere las relaciones y nociones que se desprenden de cada definición.

Actividad 3

Debata con sus compañeros.
¿Qué elementos de la definición que usted dio son relevantes o se pusieron en juego en las actividades anteriores?

Descripción de las tareas

El objetivo de las Actividades 2 y 3 es que expliciten la definición de función que manejan y relacionen esa definición con la resolución de los problemas anteriores. La discusión se pretende generar reflexionando sobre la relevancia de esa definición particular al momento de trabajar con ejercicios puntuales. Así, se pretende que reconozcan cuándo una definición que se basa en la teoría de conjuntos, por ejemplo, es “transparente” para el estudio del comportamiento variacional de una función.

Segunda etapa: Las funciones como objeto de enseñanza

Actividad 4

Trabajando con los documentos curriculares vigentes para la Provincia de Córdoba relacionados con el espacio curricular Matemática, completen en grupos de dos los siguientes ítems:

a) Lea la sección de objetivos de los documentos curriculares para Ciclo Básico (CB) y seleccione aquellos que se refieren a funciones. Acorde a estos objetivos delimite el tipo de funciones con que se trabajará en el CB y los modos en los que se espera que trabaje.

b) Lea la sección de contenidos para cada uno de los cursos del CB correspondientes al bloque “Álgebra y Funciones” y analice su secuenciación.

c) Todos los conceptos y relaciones que usted puntualizara en la Actividad 2, ¿los identifica en los contenidos propuestos para el CB?, ¿hay cuestiones que están presentes en los contenidos para el CB que usted no consideró?, ¿cuáles?

Descripción de la tarea

Las actividades que se proponen en esta etapa toman la temática Funciones como centro de un análisis crítico reconociendo a tal temática como objeto de enseñanza.

La secuenciación que propone el DC tiene una lógica que se desprende de la construcción histórica del concepto de función. Generalmente, los estudiantes del profesorado tienen presente la definición conjuntista de función, que es precisamente la que se desarrolló en estos últimos siglos. Se recomienda un análisis de una breve secuencia histórica del concepto de función para poder interpretar el sentido que se atribuyen a ciertos objetos relacionados a función (representaciones en tabla, el paso del trabajo con magnitudes a trabajar con variables, la definición de variable, etc.) Un texto que es interesante para la lectura es el capítulo “El concepto de función a través de la historia” del libro de Azcárate,

C. y Deulofeu, J. (1990): Funciones y gráficas, Colección: Matemáticas, cultura y aprendizaje, Síntesis, Madrid.

Actividad 5

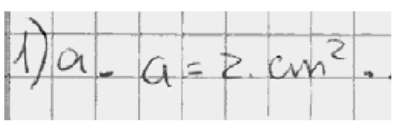
Seleccione dos libros de textos escolares de 3er año del CB. Identifique el tratamiento que se le da al concepto de función: ¿está presente una definición? ¿Cuál? ¿Comienza el capítulo/sección con la definición o la introduce luego de actividades? ¿Qué tipo de ejercicios/problemas se proponen? Relación de la propuesta con el DC.

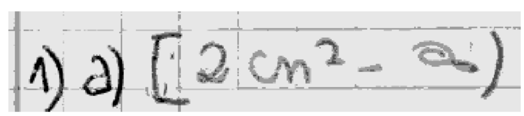
Presente un breve escrito con las observaciones realizadas. Comparta el escrito con sus compañeros.

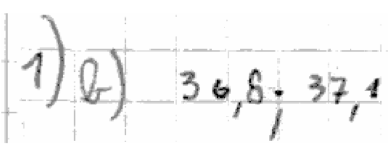
Actividad 6

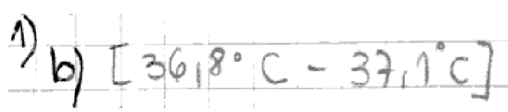
Las siguientes son producciones de alumnos al resolver algunos de los ítems propuestos en la Actividad 1. Analicen las producciones intentando identificar el origen del error o la evidencia de alguna dificultad en relación a ciertas nociones.

<u>Respuestas ítem 1:</u>

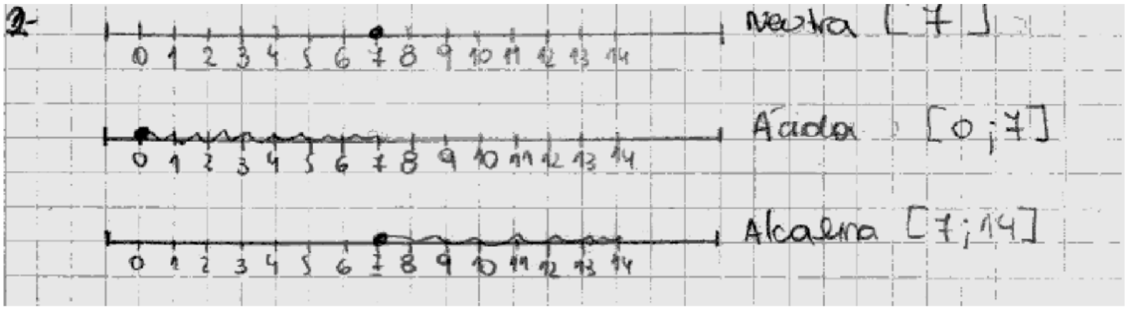


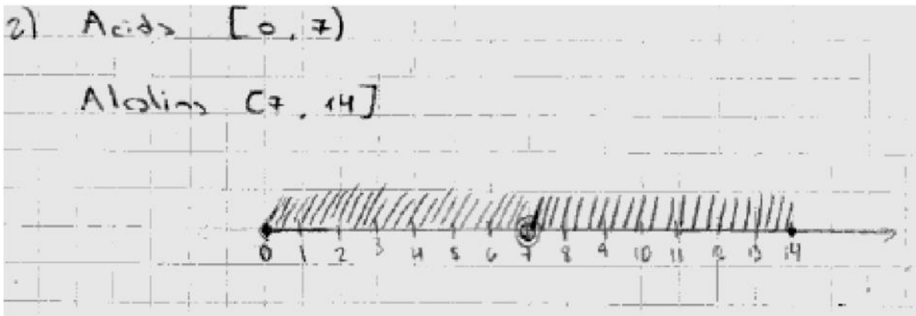






Respuestas ítem 2:





Respuestas ítem 3:

3- a) Varía el tiempo, ya que depende de como es lanzada la piedra

b) [0,1 ; 2,4]

c) [29,9 ; 1]

3) a. Lo que cambia en la situación es la posición de la piedra.

b. El intervalo es de [0;2,5]

c. El intervalo de variación de la altura es de [30;0].

Respuestas ítem 4:

4. a. (-4, 3)
b. (-6, 7)

4. a [-4 ; 3] → x
b [7 ; -6] → y

4) c) Para los valores (2, 3] ∪ (-0,5, -3,1)
d) Para los valores (2, -0,5) ∪ [3,1, -4]

4. c. De (-3, -0,5) y (2, 3)
d. (-4, -3) y (-0,5, 2)

4) d) [-0,5 - 2] ∪ (∞ - (-3,1)]
c) [(-3,1) - (-0,5)] ∪ [2 - ∞)

4. e. Para (-4, 0). (-0,5, 0) y (2, 0)

4 e (-3,1 ; 0) ; (-0,5 ; 0) ; (0 ; -1) ; (0 ; 2)

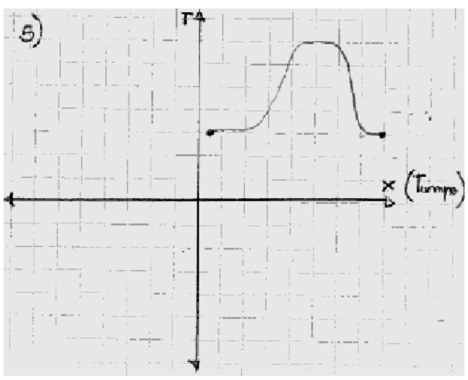
(F) $(-4;7) \cup (-2,5\,;\,2,1) - (1;-2) \cup (3,7)$.

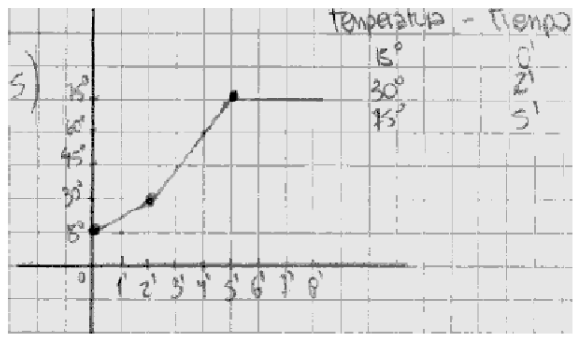
(P) $(-2,5\,;\,2,1) \cup (1,-2)$

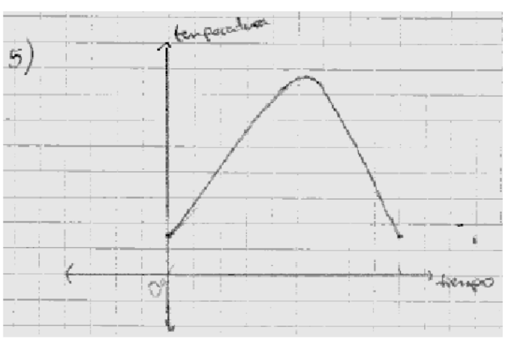
4. h. para el $(-2,2)$ y $(1,-2)$ -

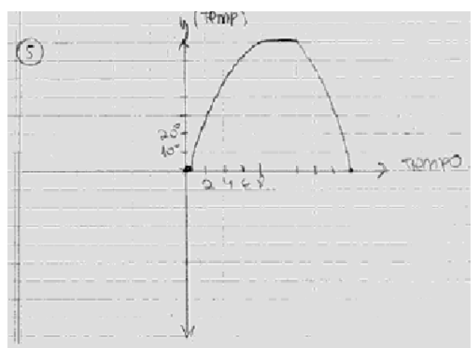
4) 4) Para los valores 1 y -2

Respuestas ítem 5:









Respuestas ítem 8:

8)

$0 = \frac{1}{2}x - 4 \qquad 4 = \frac{1}{2}x \qquad 4 : \frac{1}{2} = x \qquad 8 = x$

$(-2) = \frac{1}{2}x - 4 \qquad -2 + 4 = \frac{1}{2}x \qquad 2 : \frac{1}{2} = x \qquad 4 = x$

$6 = \frac{1}{2}x - 4 \qquad 6 + 4 = \frac{1}{2}x \qquad 10 : \frac{1}{2} = x \qquad 20 = x$

8-b-

$0 = \frac{1}{2}x - 4 \qquad 4 \cdot \frac{1}{2} = x \qquad \boxed{2 = x}$

$-2 = \frac{1}{2}x - 4 \qquad -2 \cdot \frac{1}{2} = x \qquad \boxed{-1 = x}$

$6 = \frac{1}{2}x - 4 \qquad 6 + 4 = \frac{1}{2}x \qquad 10 \cdot \frac{1}{2} = x \qquad \boxed{5 = x}$

8) $y = -\frac{1}{2}x - 4$

b)

$0 = -\frac{1}{2}x - 4 \qquad \frac{1}{2}x = -4 \qquad x = -4 : \frac{1}{2} \qquad \boxed{x = -8}$

$-2 = -\frac{1}{2}x - 4 \qquad \frac{1}{2}x = -4 + 2 \qquad x = -2 : \frac{1}{2} \qquad \boxed{x = -4}$

$6 = -\frac{1}{2}x - 4 \qquad \frac{1}{2}x = -4 - 6 \qquad x = -10 : \left(\frac{1}{2}\right) \qquad \boxed{x = -20}$

Descripción de la tarea

La actividad 6 plantea un análisis de producciones de estudiantes con la intención de visualizar dificultades comunes al tratamiento de funciones. Se pretende llegar a una discusión donde se diferencia error de dificultad y prenociones.

Posterior al trabajo con esta actividad y el debate en relación a los errores/dificultades y sus posibles orígenes, se propone la lectura del trabajo de investigación del cual se extrajeron estos resultados. El debate sobre el texto se puede gestionar a través de un foro en el aula virtual.

Lectura texto: *Variables, funciones y cambios. Exploración de las nociones que manejan alumnos de una escuela secundaria,* Marcela Hecklein, Adriana Engler, Silvia Vrancken y Daniela Müller.

Segundo eje: Registros de representación semiótica

En este eje se pretende analizar las producciones tomando como base teórica los registros de representación semiótica de Duval. Se comienza con un análisis de producciones para luego pasar a la necesidad de proponer distintas representaciones de un objeto y generar cambios de registros en las propuestas de actividades de enseñanza para así construir las nociones matemáticas en estudio.

Etapa: El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza de la Matemática

Actividad 7

Los ejercicios y problemas propuestos en la investigación de Hecklein y otros, se trabajan distintas formas de representación de una función. Debata con sus compañeros el por qué de esa decisión de las autoras.

Descripción de la tarea

A partir de la discusión debe gestionarse la emergencia de los distintos registros que se proponen en los problemas analizados. ¿Todos los registros se trabajan de igual forma? ¿Qué tipo de notación está asociada a cada registro? ¿Pasar de una tabla a un gráfico supone la misma dificultad que pasar de un gráfico a una tabla? ¿Qué ocurre cuando pasamos de la fórmula a la tabla y de la tabla a la fórmula?

El debate sobre el texto se puede gestionar a través de un foro en el aula virtual.

Luego de la puesta en común, se sugiere la lectura del texto sobre registros de representación semiótica: Objetos y sentidos de D´Amore. Se puede proponer una guía de lectura (por ej. Algunas preguntas del tipo presentadas en la actividad 8).

Actividad 8

¿Qué se entiendo por objeto de acuerdo a la lectura del texto d D´Amore? ¿Qué implica dotar de sentido a un concepto?

Actividad 9

Observe las dos actividades que se proponen a estudiantes, ¿qué conceptos están en juego?

Analice las respuestas dadas por los alumnos (el número inicial corresponde al número de alumno), considerando tipo de registro que predomina y su tratamiento. ¿Qué conceptualización del concepto de función subyace en las producciones?

1. Dé un ejemplo que explique el concepto de continuidad que usted tiene.

Respuestas de alumnos:

03: *Sea* $f(x)$ *función y c en* $f(x)$, *si los límites laterales de éste son iguales entonces es continua.*

11: *Por ejemplo la línea recta definida por la ecuación* $x+y = 8$, *está en un dominio R, tiene infinitas soluciones y es continua en R.*

15: *Una función que se dibuja con una sola línea.*

18: *Los polinomios.*

19: $x^2 +3x+2$ *es una función continua en todo su dominio ya que los polinomios son continuos.*

21: *El gráfico de una recta constante. Ejemplo:* $y = 3$

25: *Ejemplo: una analogía graficable por una función exponencial, el crecimiento de una colonia de bacterias en un periodo de tiempo.*

26: *Por ejemplo, el seno es una función continua en todo su dominio* (*todas las funciones trigonométricas son continuas cuando sus gráficos no se cortan*).

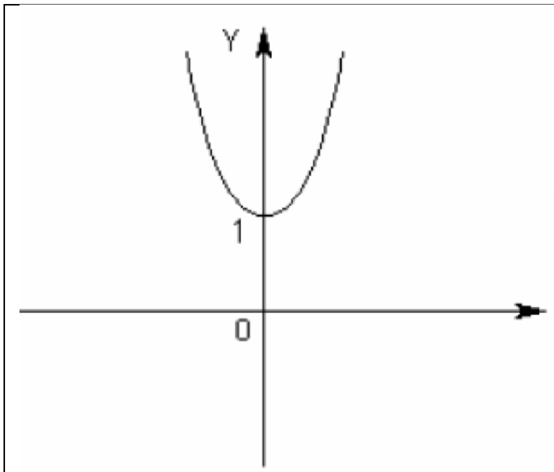
35: *La función seno.*

46: *La continuidad son funciones que no tienen ningún tipo de perforaciones y no se indefinen en ningún punto, ejemplo: los polinomios.*

55: *f*(x)=x^2, *es continua en todos los reales, puesto que no se indefine.* $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ *tiene una discontinuidad en* $x = 1$ *y* $x = -1$, *luego mediante el concepto de límite hay que verificar si sus discontinuidades son reparables.*

61: *La gráfica de* $y=\dfrac{x+1}{x}$ *no es continua ya que en* $x = 0$ *la función no está definida.*

67: *Un ejemplo sería la función sen x que es constante en todos los R y no tiene saltos entre un punto y otro.*



2. La parábola dibujada es la representación gráfica de una función real *f*.

a) Se afirma que f no es una biyección. Explique por qué.

b) Marque una parte de la parábola que represente una biyección.

c) Escriba una fórmula para *f*.

<u>Respuestas de alumnos</u>:

<u>Ítem a)</u>

12: *f no es biyectiva, porque no es inyectiva ya que para distintas preimágenes existe la misma imagen.*

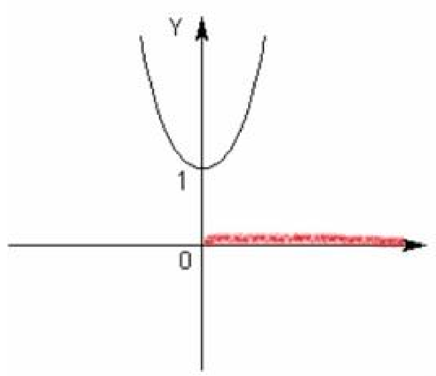
19: *No es biyectiva, para cada x existen dos imágenes.*

22: *Si se traza una paralela al eje de las x, ésta corta a la parábola en dos puntos.*

<u>Ítem b)</u>

19: *[0;+∞]*

21:



23: *En el primer cuadrante.*

<u>Ítem c)</u>

6: $f(x)=\begin{cases} f & si\ x<0 \\ f & si\ x>0 \end{cases}$

10: $f(x)=x^2-1$

11: $x^2=y$

18: $y+1=(x+0)^2$

21: $(x+h)^2=4c(y+k)$

50: $f(x)=(x+1)^2$

55: $y=ax^2+b$

Descripción de la tarea

En la actividad 9 se propone realizar un análisis de respuestas de alumnos teniendo en cuenta los registros de representación semiótica de Duval, observando en qué casos la transformación de un registro a otro parece más complejo, cuáles son los registros más frecuentes, etc.

A partir de este análisis y de la lectura del artículo de Ismenia Guzman “Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes” (de donde se extrajeron las respuestas de alumnos) se sugiere resaltar la importancia del trabajo en diferentes registros para lograr la comprensión de los conceptos por parte de los alumnos. El debate sobre el texto se puede gestionar a través de un foro en el aula virtual.

Tercer eje: Estudio didáctico del Análisis Matemático

En este eje se pretende reflexionar, analizar y poner en cuestión la enseñanza del análisis matemático.

Primera etapa: Aproximaciones intuitivas y experimentales: el sentido de la razón de cambio y la acumulación

Actividad 10

La siguiente planificación fue preparada e implementada en la materia anual Problemáticas del Análisis I correspondiente al 2° año de la carrera Profesorado de Educación Secundaria en Matemática en una institución de nivel superior no universitaria. En la misma se observa las notas para la gestión del docente (en *itálica*).
La secuencia fue puesta en práctica en el segundo semestre del año lectivo a un grupo de 20 estudiantes. Los mismos no tuvieron una introducción formal de los conceptos de límite ni derivada; en la unidad temática anterior trabajaron con el estudio de funciones.
La primera actividad se desarrolló en una clase de 80 minutos, mientras que para las actividades 2 a 4 se destinaron 120 minutos de la siguiente clase. En el aula disponían de recursos tecnológicos (computadoras, proyector), de manera tal que los estudiantes trabajaron haciendo uso del software GeoGebra a partir de la actividad 2. Las actividades de profundización se desarrollaron en la tercera y cuarta clase.
Lea con atención la planificación y resuelva todas las actividades. Para ello se recomienda utilizar el programa GeoGebra a partir del punto 2.

“PLANIFICACIÓN

Unidad curricular: Problemáticas del Análisis Matemático I

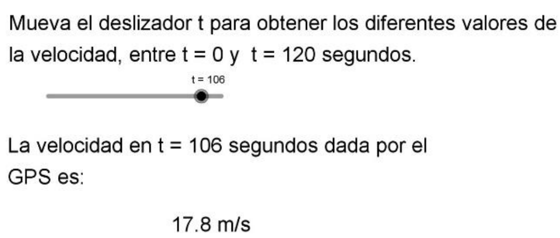
I. Problema inicial: Física Forense: En un lugar de la ruta 56, exactamente a 1600 metros de la estación de peaje, se encontró un auto con el cadáver de Juan Pérez. La policía averiguó que un único automóvil pasó por esa estación, y era conducido por Mario López. Este conductor afirma que cuando él pasó por la ruta, no vio ningún automóvil. Una filmación muestra que a las 12:56 hay un auto junto al de Juan Pérez. El ticket de peaje de Mario López muestra que pasó por allí a las 12:54. La policía dispone de los datos de la velocidad del auto de López en esos dos minutos, y observa que a las 12:56 la velocidad es cero y averiguó que se desplazó siempre en línea recta y en el mismo sentido. Se necesita determinar con la mayor precisión posible si López se detuvo a las 12:56 junto al auto de Pérez.

Tiempo (en segundos)	Velocidad(en m/s)
15	11.11
28	18.6
32	20
34	20
56	10.56
110	17.22
120	0

Nota para el docente: Se propone un trabajo grupal, y se pretende gestionarlo de manera que surjan distintas estrategias de abordaje. En la instancia de discusión colectiva se compararán los resultados obtenidos, poniendo el eje en las razones por las que se obtienen diferentes resultados. Se pretende arribar a la necesidad de contar con mayor cantidad de datos para obtener mayor precisión.

A partir de esta necesidad y notando que no pueden llegar a una conclusión, se propone la siguiente actividad:

II. Debido a la discrepancia entre los resultados obtenidos por los forenses, se vio la necesidad de disponer de mayor cantidad de datos sobre la velocidad a la que se desplazaba López en esos dos minutos luego de pasar por el peaje. En la plantilla GeoGebra Datos.ggb encontrarán un deslizador que les permite acceder a los datos que consideren necesarios dentro de ese período de tiempo. Determinen con esta nueva información la distancia recorrida por López.



Para discutir en grupos:

- ¿cuántos pares de datos tiempo/velocidad conviene usar?
- ¿conviene que la amplitud de los intervalos sean iguales o no?
- ¿qué amplitud de intervalos conviene utilizar?
- Si tengo muchos intervalos, ¿cómo hago para agilizar el cálculo?

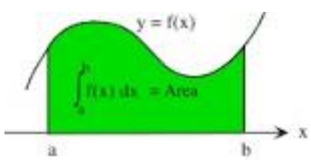
En esta discusión se intenta llegar a que los distintos grupos acuerden tomar intervalos regulares de x segundos. Dada la cantidad de intervalos con los que contarán se propone el uso de un software que agilice el cálculo.
A partir de esta última pregunta, se dedicará un tiempo de trabajo con la herramienta Geogebra. En especial con las funciones SumaInferior, SumaSuperior, y funciones de ajuste de curva.
El objetivo de la actividad es que los estudiantes logren obtener una función en Geogebra representando la velocidad.
Para ello, deberán pasar los datos de la tabla que construyeron a la hoja de cálculo y armar la lista de puntos para que aparezcan los pares ordenados en el gráfico cartesiano.

III. Ingresen los datos de la tabla a la hoja de cálculo de GeoGebra y armen la lista de puntos para que aparezcan los pares ordenados en el gráfico cartesiano. Encuentren algún ajuste de curva adecuado.
Exploren las funciones SumaInferior y SumaSuperior de GeoGebra. ¿Qué observaciones pueden hacer?

¿Por qué es importante fijar el valor de x inicial y el valor de x final al utilizar estos dos comandos? ¿Qué ocurre cuando aumentan la cantidad de intervalos?

Con ayuda de las funciones SumaInferior[<Función>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Rectángulos>] o SumaSuperior[<Función>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Rectángulos>] de GeoGebra, se discutirá por qué es importante fijar el valor de x inicial y el valor de x final al utilizar estos dos comandos y se irán analizando los resultados encontrados al ir aumentando la cantidad de intervalos.
En este punto se trabajaría la existencia de un valor para el área buscada, que es mayor que todas las sumas inferiores y menor que las superiores, y que las mismas se aproximan al número buscado, cuando la amplitud de los intervalos elegidos tiende a cero. No se pretende introducir la noción de límite, sino trabajar con los conceptos intuitivamente.
Después de esta construcción se introduciría el concepto de integral definida como función, recurriendo a Geogebra, mostrando inclusive la notación simbólica.

La función **Integral[f,a,b]** de Geogebra computa una función matemática denominada integral definida. Cuando se trata de una función f continua y positiva en un intervalo [a,b] no trivial, la misma tiene el valor del área bajo la curva, y se denota:

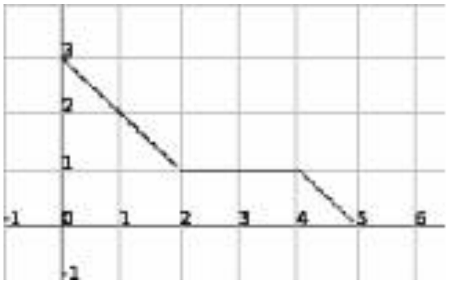


IV. Recuperen el problema inicial. ¿Qué respuesta le dan al problema? ¿López efectivamente se detuvo próximo al auto de Pérez?

ACTIVIDADES DE PROFUNDIZACIÓN

A partir de estudio de integral realizado anteriormente y con ayuda de los comandos de GeoGebra cuando creas conveniente, realiza las siguientes actividades.

1. La siguiente gráfica muestra la velocidad v con la que un tanque de combustible pierde su contenido a través de una rotura.



Una unidad en el eje x representa una hora, mientras que una unidad en el eje y representa 1000 litros por hora.

a) ¿En qué hora (entre la primera y la quinta) se perdió menos combustible?

b) ¿Cuánto vale la integral definida entre 0 y 2 de v? ¿Qué significado tiene?

c) El combustible derramado es recolectado desde el principio en un recipiente que tiene 2750 litros. ¿En qué momento el combustible recolectado colma el recipiente de recolección?

2. Se prueba un vehículo experimental en una pista recta. Parte del reposo y su velocidad v (en m/s) se registra en la tabla cada 10 seg durante un minuto.

T	0	10	20	30	40	50	60
V	0	5	21	40	62	78	83

Calcular la distancia recorrida durante la prueba. Sugerencia: pruebe el ajuste polinómico con diferentes grados.

3. Para un móvil que parte del reposo, la función v(t)=9t permite determinar su velocidad v medida en km/h, respecto del tiempo de marcha t, medido en horas.

a. Encuentren una función que permita calcular el espacio recorrido por el móvil después de t horas de marcha.

b. ¿Cuántos km recorre el móvil después de 15 hs de estar en continuo movimiento?

4. Considere el gráfico de la función $f(x)=x^2$. Encuentre una aproximación por defecto del área entre la curva y el de abscisas en el intervalo [0;5]

a. Dividiéndolo en 5 subintervalos de igual longitud

b. Dividiéndolo en 10 subintervalos de igual longitud

5. Considere el gráfico de la función f(x)=x^2. Encuentre una aproximación por exceso del área entre la curva y el de abscisas en el intervalo [0;5]

a. Dividiéndolo en 5 subintervalos de igual longitud

b. Dividiéndolo en 10 subintervalos de igual longitud

6. Calcule la integral de la función f(x)=x^2 en el intervalo [0;5]. Ordene de menor a mayor los valores obtenidos en los ejercicios 5, 6 y 7.

7. Calcule la integral de la función f(x)=sen x

a. en el intervalo [0;2pi]

b. en el intervalo [0;pi]

c. en el intervalo [pi;2pi]

d. ¿Cuál es el área entre la curva y el eje de las abscisas en el intervalo [0;2pi]?”

Descripción de la tarea

Se espera que los estudiantes se enfrenten a la situación con las herramientas que han construido por su paso por las unidades curriculares de análisis matemático. Esto los hará contrastar su formación con la que se pretende en la secuencia didáctica propuesta. Se sugiere enfatizar sobre la “necesidad” de contar con nociones de derivada y límite para construir el concepto de integral ¿son necesarias estas nociones?

Actividad 11

Luego de haber realizado las actividades propuestas en la planificación, responde:

a. ¿Qué conceptos están involucrados en las actividades propuestas? ¿Cómo se relacionan entre sí?

b. ¿Qué tipo de respuestas imaginan que los estudiantes pueden dar? ¿Qué estrategias podrían poner en juego para resolver las actividades? ¿Qué dificultades pueden encontrar?

c. ¿Qué desafíos puede suponer para un docente implementar esta planificación?

d. ¿Qué papel tienen las tecnologías en las actividades? ¿Qué aspectos de la tarea resuelven? ¿A qué pueden invitar? ¿Se hubiera podido realizar esta secuencia sin usar las tecnologías?

Descripción de la tarea

Luego de la puesta en común sobre estos puntos, se sugiere la lectura del texto de Viola y Nieto "Estudiando el cambio: una propuesta para la introducción del concepto de integral en el nivel secundario".

En relación a la importancia del uso de las tecnologías, se sugiere la lectura del texto de Moreno Armella, L. ¿Cómo impactan las tecnologías los currículos de la Educación Matemática? Se puede proponer un debate sobre el mismo en el foro del aula virtual

Segunda etapa: Diferentes paradigmas y tendencias actuales en la enseñanza del Análisis Matemático

Actividad 12

Lea el texto de Azcarate y Camacho. ¿Qué aportes considera interesantes para su formación como profesor/a de matemática?

Actividad 13

Busque libros de textos (de nivel secundario en lo posible) donde se trabajen conceptos de límite, derivada e integral. Realice un análisis de los mismos en relación a las siguientes cuestiones:

¿Cuál es la secuenciación de contenidos propuesta?

¿Cuál es el rol de la definición? (Tome en cuenta lo que discute el texto de Azcarate y Camacho)

¿Cuál es el lugar de las técnicas de resolución?

¿Encuentra que con las actividades sugeridas en el libro los alumnos puedan construir un sentido del análisis matemático? ¿Cuál?

¿La forma en que presenta el tema el libro analizado, difiere de la formación que usted ha recibido?

Actividad 14

Lea el texto de Salinas y Alanis. Luego de la lectura analice la propuesta de las unidades curriculares Problemáticas del Análisis I y II del Profesorado de Nivel Secundario en Matemática. Establezca relaciones entre los documentos.

Descripción de la tarea

La intención de estas actividades es que los estudiantes pongan en tensión la enseñanza del cálculo tradicional y reconozcan la necesidad de construir sentido en relación a los conceptos de razón de cambio y cambio acumulado.

Bibliografía

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003) Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, N° 2, pp. 135-149

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990) El concepto de función a través de la historia, en *Funciones y gráficas*, Colección: Matemáticas, cultura y aprendizaje, Edit. Síntesis, Madrid.

D'Amore B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En: Radford L., D'Amore B. (eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. Numero speciale della rivista Relime* (Cinvestav, México DF., México), pp. 177-196

Guzmán R., I. (1998) Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 1, N° 1, pp. 5-21

Hecklein, M., Engler, A., Vrancken, S. y Müller, D. (2011) Variables, funciones y cambios. Exploración de las nociones que manejan alumnos de una escuela secundaria*, Premisa, Vol. 13, N° 49, pp. 23-39*

Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba (2012-2015) Diseño curricular. Ciclo Básico de Educación Secundaria. Recuperado de http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/LISTO%20PDF/TOMO%202%20Ciclo%20Basico%20de%20la%20Educacion%20Secundaria% 20web%208-2-11.pdf

Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba (2014) Diseño curricular. Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Recuperado de http://dges.cba.infd.edu.ar/sitio/index.cgi?wid_item=71&wid_seccion=17

Moreno Armella, L. (2011) ¿Cómo impactan las tecnologías los currículos de la Educación Matemática?, *Resúmenes de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Recife, Brasil. Recuperado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14734/13979

Salinas, P. & Alanis, J. A. (2009) Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 355-382.

Viola, F. y Nieto, E. (2016), "Estudiando el cambio: una propuesta para la introducción del concepto de integral en el nivel secundario, *Memorias de la VI Reunión Pampeana de Educación Matemática*, pp. 154-164. Recuperado de http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/descargas/MemoriasVIREPEM2016_completas.pdf

---

[i] **Equipo de trabajo:**

Viviana Audisio – Pamela Chirino – Nicolás Gerez Cuevas – Héctor Gramaglia – Natalia Heredia – Fernanda Viola.

Contacto: vgaudisio@gmail.com