MATEMÁTICA para la FORMACIÓN DOCENTE

Articulación DGES - FAMAF[1]

Unidad Curricular: ELEMENTOS DE LA ARITMÉTICA Y EL ÁLGEBRA

Objetivo general de la propuesta

Proponer un conjunto de actividades que permitan un primer abordaje de los ejes de contenidos propuestos por el Diseño Curricular para Elementos de la Aritmética y el Álgebra, que ponga el foco en los conceptos y prácticas centrales de cada eje, y promueva una participación activa de los estudiantes.

Fundamentación

Las consideraciones acerca del campo de la formación específica del Diseño Curricular nos hablan de un modo particular de lectura de los ejes de contenidos que se proponen en cada unidad curricular: ya no se trata de una lectura lineal de suma de temas. Para los docentes que fuimos formados en matemática superior de una manera tradicional, elaborar una alternativa a la lectura secuencial, que atribuye a cada palabra del eje un conjunto determinado de conceptos y resultados que se van concatenando respetando un orden estrictamente deductivo, es una tarea ardua que nos lleva a un terreno en donde las seguridades construidas por años de experiencia quedan en suspenso.
En esta unidad curricular el estudiante, en tanto futuro docente, debe comenzar a asumir una posición crítica frente al saber matemático, dando cuenta de su origen y sentido[2] Abordar esta tarea no puede de ninguna manera ser reducido a la incorporación de un conjunto de técnicas de manipulación de expresiones, ni mucho menos a la vigilancia de un estricto orden lógico- deductivo dado por definiciones y teoremas. Dar cuenta del origen y sentido requiere proponer tareas que poco tienen que ver con ese orden, el cual

---

[1] **Equipo de trabajo: Viviana Audisio – Pamela Chirino – Nicolás Gerez Cuevas – Héctor Gramaglia – Natalia Heredia – Fernanda Viola. Contacto: vgaudisio@gmail.com**

[2] Fundamentación de la incorporación de la palabra "problemáticas", que leemos en las consideraciones acerca del campo de la formación específica.

generalmente fue instalado en la comunidad matemática muchos siglos después del momento de origen de las ideas centrales. Aún cuando pongamos como objeto de estudio a la demostración matemática (cosa que haremos en algunas actividades de esta propuesta), pretender que el estudiante construya el sentido de ese objeto de estudio por su sola exposición secuencial es una falacia. Una demostración es un objeto matemático complejo[3], que poco tiene de secuencial, y su auténtico estudio requiere de estrategias adecuadas, tanto para abordarlo como para evaluarlo (el mero "recitado" de la demostración no es una evidencia confiable de aprendizaje ni de comprensión).

Esta propuesta intenta plasmar un conjunto de tareas pensadas para Elementos de la Aritmética y el Álgebra que, en sintonía con el espíritu del diseño, promueva "*el abordaje de saberes sustantivos para ser enseñados, vinculados con conceptos, procedimientos y prácticas centrales de las disciplinas de referencia*", y que permita abordar una matemática de nivel superior, sin perder de vista que estamos formando docentes para el nivel secundario.

Por otro lado, la propuesta se pretende acorde a la propuesta de desarrollo de capacidades fundamentales de la Subsecretaría Promoción de Igualdad y Calidad Educativa del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba.

Descripción general y su inscripción en el Diseño Curricular

Ejes de contenidos sugeridos para Elementos de la Aritmética y el Álgebra

Los lenguajes de la Matemática

Revisión y re-significación del lenguaje matemático propio de la Aritmética y del Álgebra. Recuperación y reconstrucción de los significados relativos a las nociones de conjunto, relación y función. Los conjuntos, las relaciones y las funciones como herramientas de modelización.

Los conjuntos numéricos

[3] El sistema formal en el cual se basan la demostraciones que se desarrollan usualmente en el pizarrón es de hecho un sistema semi-formal inspirado en una combinación de varios sistemas formales (sistemas Hilbert-Frege y Gentzen-Prawitz, entre otros). Por una cuestión de practicidad frecuentemente se ocultan aspectos fundamentales que revelan la complejidad que como objetos matemáticos tienen las demostraciones.

Las propiedades elementales de las operaciones de cada conjunto numérico. Los campos numéricos y sus operaciones en relación a la resolución de ecuaciones algebraicas.

Problemáticas y paradojas relacionadas con la cardinalidad

Lo finito, lo numerable, lo no numerable. La cardinalidad de los distintos campos numéricos. Las paradojas relacionadas con lo infinito y su abordaje histórico.

La estructura inductiva de los números naturales

Propiedades del orden de los números naturales: el método de descenso infinito, el buen orden y el principio de inducción. Los procesos recurrentes. El paso a lo infinito a través de la recurrencia.

El problema de contar

Principios básicos para contar la cantidad de elementos de un conjunto. La generación de fórmulas vinculadas al problema de contar. Los números combinatorios. Las particiones. Su uso en la probabilidad elemental.

En esta propuesta nos proponemos desafiar una lectura lineal de los ejes de contenidos, apelando a actividades que permitan una construcción progresiva de los sentidos y conceptos fundamentales de cada eje, a través de algunos problemas y tareas que implican una participación activa de los estudiantes. Abordaremos los primeros tres ejes. La elección de los mismos obedece a la necesidad de repensar estos saberes en clave de la formación docente, dado que su presencia en la mayor parte de los textos de nivel superior responde a las demandas de enseñanza de otros perfiles diferentes al docente. Los últimos dos ejes que no abordaremos presentan menos dificultades para ser presentados desde la bibliografía existente.

Las actividades propuestas no agotan los contenidos de cada eje. Terminada la secuencia el docente, si lo considera necesario, retomará cada uno de ellos proponiendo actividades que permitan acceder a mayores niveles de sistematización y estructuración de la teoría involucrada.

La propuesta se estructura en secciones, una por cada eje abordado, que comienzan con la transcripción del eje según aparece en el Diseño Curricular, y continúa con una secuencia de actividades permiten un primer abordaje a los contenidos centrales. Son actividades que apuestan a una participación activa de los estudiantes.

En la la formulación de cada actividad, el docente encontrará:

- Los objetivos de la actividad.
- El texto para entregar a los alumnos.
- Las orientaciones para la gestión de la misma.

Al finalizar cada eje damos algunas sugerencias, actividades y/o bibliografía para que el docente pueda elaborar la continuidad de la propuesta.

Actividades propuestas para el eje:

Los Lenguajes de la matemática

Revisión y re-significación del lenguaje matemático propio de la Aritmética y del Álgebra. Recuperación y reconstrucción de los significados relativos a las nociones de conjunto, relación y función. Los conjuntos, las relaciones y las funciones como herramientas de modelización.

Objetivo general: Propiciar un encuentro con el lenguaje usual de la matemática ensayando un análisis meta-matemático, que le permita al estudiante una primera aproximación al problemas de dar significado a una frase que expresa un hecho matemático. En particular, que le permita revisar el sentido otorgado a diversos símbolos como las *variables*, los *conectivos*, los *cuantificadores*, los *operadores* de conjuntos, y ciertas nociones que eventualmente ya le son familiares como *relación, función, dominio, imagen y ecuación.*

Actividad 1

Objetivo: Revisar el sentido otorgado a diversos símbolos matemáticos como las *variables*, los *conectivos booleanos (conjunción-disyunción)* y los *cuantificadores*.

Texto de la actividad

¿Qué entendemos por significado de una frase matemática?

Una frase que expresa un hecho matemático tiene una propiedad fundamental, que no tiene en general una frase cualquiera del lenguaje natural: tiene una **denotación precisa.** La misma puede ser un **objeto matemático** (número, recta, plano, conjunto, etc.), o **un valor de verdad** (verdadero o falso). Estas frases, que constituyen los ladrillos con los que se elabora una teoría matemática, pueden ser analizadas descomponiéndolas en sus partes constitutivas, de la misma manera que se analiza una frase del lenguaje natural cuando identificamos sujeto, predicado, verbo, etc. Podemos lograr una primera aproximación a este proceso analítico intentando responder las siguientes preguntas:

- **¿Indica un objeto (preciso o genérico)?** Las frases de este tipo son llamadas **términos**, y cuales **refieren** (también se dice **denotan)** a un objeto matemático (número, recta, plano, conjunto, etc.). Algunos ejemplos de frases que refieren a un objeto son:
    - 7 (objeto preciso)
    - $x + 1$ (objeto genérico)
    - $A\widehat{B}C$
    - 5 - 2
    - “el primer múltiplo de 3 mayor que 2019”
    - $min\{\, n \in N \,/\, (\exists k \;\; n = 3k) \;\wedge\; n > 2019 \,\}$

- **¿Tiene un valor de verdad que podamos establecer (aunque sea difícil)?** Las frases de este tipo son llamadas **sentencias o predicados** y constituyen los ladrillos con los que construimos una teoría matemática. Ellas **denotan** un valor de verdad. Son ejemplos de frases de este tipo:
    - $n > 2019$
    - “3 es par”
    - “el ángulo menor de un triángulo rectángulo tiene menos que 90 grados”
    - $A\widehat{B}C \approx D\widehat{E}F$
    - “el único primo par es 2”
    - $\forall x \quad x$ es múltiplo de 4 $\Rightarrow$ $\exists y \;\; y \in N \;\wedge\; x = 2y$
    - “la suma de los ángulos interiores de un triángulo 180 grados”

La matemática construye sus verdades enunciando sentencias que, como se puede observar, se construyen a partir de otras frases más simples. La estructura sintáctica de una sentencia articula predicados básicos a través de conectivos lógicos y cuantificadores.

Enunciar sentencias será una tarea muy frecuente en tu aula en los próximos años. Para poder llevarla adelante es necesario generar algunos acuerdos básicos sobre la manera en que interpretamos las frases del lenguaje matemático. Esta actividad tiene por objetivo generar los primeros acuerdos sobre el significado de algunos símbolos matemáticos como las variables, los conectivos y los cuantificadores.

Responde:

¿cuáles de las siguientes sentencias expresan una propiedad del conjunto $A = \{2, 3, 4\}$?

Dicho de otra manera,

¿cuáles de las siguientes sentencias son verdaderas, considerando el conjunto $A = \{2, 3, 4\}$?

1. Para todo $x \in A$ se tiene que x es par y también primo
2. $\forall x \in A \quad x\ es\ par \vee x\ es\ primo$
3. Algún x en A es es par y también primo
4. Todo $x \in A$ es par, o primo, o x es mayor que 8

Orientaciones para el docente

Es importante que se insista en el uso de diversos lenguajes, más o menos formales, poniendo énfasis en la rigurosidad de la interpretación, cuando se utiliza el lenguaje natural, e induciendo una “traducción en palabras”, cuando se utiliza el lenguaje formal. Por ejemplo, es recomendable insistir en ensayar formas de expresar en lenguaje natural de manera sencilla sentencias como:

$$\forall x \quad x\ múltiplo\ de\ 4 \quad \Rightarrow \quad \exists y \ \ y \in N \wedge x = 2y$$

Es importante comenzar a discutir la idea de "validación" de una respuesta. Dejar claro que si afirmamos que la sentencia es falsa, como es el caso de la primer sentencia (la única falsa), entonces como la sentencia habla de "todos" los números del conjunto, su refutación implica mostrar un número del conjunto que no satisfaga la propiedad expresada (en este caso el 3 y el 4, que no son simultáneamente pares y primos).

Algunos errores usuales en la interpretación de estas frases son:

- Considerar el "o" exclusivo, es decir que si se da una condición no se puede dar simultáneamente la otra.
- Considerar que la disyunción es falsa porque algún predicado no se satisface en ningún caso, como por ejemplo "x es mayor que 8" en la última sentencia.

Actividad 2

Objetivo: Revisar el sentido otorgado a diversos símbolos matemáticos como las *variables*, el *conectivos condicional* y los *cuantificadores*.

Texto de la actividad

(A) El conectivo condicional nos permite mayor poder expresivo, en tanto nos permite referirnos diferenciadamente a un tipo particular de objetos. Responde:

¿Cuáles de las siguientes sentencias expresan una propiedad del conjunto $A = \{2, 3\}$?

5. Todos los números pares de A son primos
6. $\forall x \in A \;\; x \; es \; par \; \Rightarrow \; x \; es \; primo$
7. Todos los x en A impares son mayores que 1000
8. Cualquier x en A que sea impar y no sea primo, es mayor que 8

(B) Analice ahora la validez de las sentencias del ítem (A) considerando ahora como A cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{2, 3, 4\}$ (b) $A = \{2, 3, 9\}$ (c) $A = \{2, 3, 8\}$ (d) $A = \{2\}$

Orientaciones para el docente

Insistimos con que es importante la familiaridad del estudiante con el uso de diversos lenguajes, más o menos formales. En esta actividad seguramente surgirán dudas sobre la interpretación del conectivo condicional (implica), que presenta una dificultad de interpretación: cuesta encontrar sentido al hecho de que es verdadero cuando el antecedente es falso. En las sentencias dadas, aparece esta dificultad en

"Cualquier x en A que sea impar y no sea primo, es mayor que 8"

que es una sentencia verdadera, en tanto no existen miembros del conjunto A que sean impares y compuestos (no primos) simultaneamente.

Actividad 3

Objetivo: Revisar el sentido otorgado a los operadores de la teoría de conjuntos.

Texto de la actividad

Completar los cuadros

U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}   A = {0,2,4,6,8}   B = {0,1,2,3,4}

El significado de A^c siempre refiere a los números del universo en cuestión, en este caso U, que no están en A (alternativamente $U - A$).

Cuadro 1

números del universo que son impares	A^c
pares menores que 5	$A \cap B$
impares menores que 5	
	$A \cap B^c$
	$A^c \cap B^c$

Los que son impares, o son mayores que 4	
	$A^c \cup B$
	$A \cup B^c$

Cuadro 2

	Usando ^{c} y $\cap$	Usando ^{c} y $\cup$
Los que son impares y mayores que 4	$A^c \cap B^c$	$(A \cup B)^c$
Los que son pares y son menores que 5		
Los que son pares o son menores que 5		
Los que son pares, o son mayores que 4		

Actividad 4

Objetivo: Revisar el sentido otorgado a diversos símbolos matemáticos como las *variables*, los *conectivos* y los *cuantificadores*, a través de la exploración de expresiones equivalentes.

Texto de la actividad

Considere la sentencia:

$$\forall x \in A \quad \exists y \in A \quad \neg(y \text{ es par}) \ \wedge \ y \geq x$$

¿Cuales de las siguientes sentencias en lenguaje natural, que hablan sobre los elementos de A, considera que son equivalentes a la dada?

- "*dado cualquier elemento se puede encontrar otro, que es impar, y es mayor o igual a él*"
- "*hay un elemento en el conjunto que es impar, y mayor que todos los demás*"
- "*todo elemento es impar, o tiene otro más grande que es impar*"

Luego exprese de manera formal las sentencias que no sean equivalentes a la dada.

Actividad 5

Objetivo: Que el estudiante resignifique el lenguaje usual de la matemática, ensayando un análisis metamatemático del lenguaje natural, que permita cuestionar el uso de diversos símbolos del lenguaje como las variables, los conectivos, los cuantificadores y los operadores de conjuntos.

Texto de la actividad

$P_1(x) \;=\;$ "x *es nativo de la ciudad de córdoba*"

$P_2(x) \;=\;$ "x *tiene* 18 *años o más* "

$P_3(x) \;=\;$ "x *hoy llegó al instituto caminando desde su casa*"

(a) Escriba una sentencia en lenguaje formal que represente los siguientes predicados, que están expresados en lenguaje natural:

- "*Todos los alumnos menores de 18 años son nativos de Córdoba*"

  Rta: $\forall x \; \neg P_2(x) \;\Rightarrow\; P_1(x)$
- *"Hay alumnos menores de 18 que que no son nativos de córdoba*
- *"Hay alumnos que son nativos de Córdoba, pero no vienen al instituto caminando"*
- "*Todos los alumnos que vienen al Instituto caminando y son menores de 18 años, son nativos de Córdoba*"

(b) ¿En cuáles de los siguientes hipotéticos cursos vale la propiedad $\forall x \; \neg P_2(x) \;\Rightarrow\; P_1(x)$?

Curso 1

	Nativo	Edad
Mariana	Cba	17
Sebastián	Bs As	19
Marisa	Cba	34

Curso 2

	Nativo	Edad
José	Salta	18
María	Bs As	22
Marisol	Sta Fe	18

(c) Considere la sentencia $\forall x\ \neg P_3(x) \vee (P_1(x) \wedge P_2(x))$. Explique en palabras lo que expresa la misma. Intente diversas maneras equivalentes de expresar en palabras el mismo enunciado, y piense cuál le resulta más clara.

(c) Si consideramos que nuestro universo es este curso, ¿es cierta la sentencia del punto (c)?

(d) ¿Puede construir una fórmula utilizando los predicados $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ que identifique completamente su persona dentro del curso?

Orientaciones para el docente

Para (c) sugerir diversas equivalencias, algunas no triviales. Por ejemplo:

"Son *nativos de Córdoba, de 18 años o más, excepto algunos que no vinieron caminando*".
"Todos *llegaron en un vehículo (auto, bici, colectivo, etc.), excepto algunos que son nativos de Córdoba, de 18 años o más*".

"*Los que vinieron caminando son nativos de Córdoba, de 18 años o más*".

Se sugiere discutir qué interpretan sobre la consigna (d). Se pueden dar ejemplos:

- Si hubiese sólo una persona en el curso menor que 18 años, entonces sería posible identificarla a través del predicado: $\neg P_2(x)$.
- Un curso en el que hay, entre otros, dos personas que vienen caminando, ambas nativas de Córdoba con 20 años de edad. A esas personas no será posible diferenciarlas utilizando $P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)$.

Actividad 6

Objetivo: Propiciar un encuentro del estudiante con el lenguaje usual de la matemática ensayando un análisis meta-matemático que permita revisar el sentido otorgado a la notación y los conceptos relacionados con la noción de función

Texto de la actividad

Sabemos sobre las funciones f, g, h lo siguiente:

- El dominio de f y de h es $N \cap [0, 10)$. (Aquí $[0, 10)$ refiere al intervalo de números reales)
- g es una función definida en los reales, dada por la expresión $g(x) = 2x + 1$.
- Para todo $n \in N \cap [0, 10)$ valen las igualdades:

$$f(n) = g(n) + 1$$
$$h(n) = g(n - 1)$$

1. ¿Cuánto vale $f(5)$? ¿Y $h(5)$?
2. Si se afirma que $x \in dom(h)$, ¿qué valores puede adoptar x?
3. ¿Es correcta la afirmación $\forall x \in dom(g)\ f(x) = g(x) + 1$?
4. ¿Qué entendés por imagen de f? ¿Cuál es?
5. ¿Qué entendés por rango de f? ¿Cuál es?
6. Obtenga representaciones adecuadas que permitan visualizar los valores que adopta f en cada miembro de su dominio.

7. Obtenga una representación gráfica que permita visualizar los valores que adopta g. Luego represente en el mismo gráfico f y h.
8. Ciertos tipos de funciones tiene una función inversa. Analiza la existencia de funciones inversas para f y h. Encuéntralas en caso de existir.

Orientaciones para el docente

Sugerimos que la actividad desarrollada en grupo con intervenciones del docente sólo cuando surjan dudas y/o discusiones en el interior del grupo.

Debido a que no hay acuerdos totales en la bibliografía sobre los significados de “rango” e “imagen” (valores alcanzados?, conjunto de llegada?), quizá sea conveniente una discusión con el grupo clase para luego fijar acuerdos sobre estos conceptos.

Se sugiere además una puesta en común sobre los puntos 6 y 7, para generar acuerdos sobre el uso de un sistema de coordenadas y representación de una recta.

Actividad 7

Objetivo: Alentar una discusión sobre el valor de verdad de una propiedad algebraica según los campos numéricos involucrados, poniendo énfasis en el significado de validar y/o refutar una propiedad.

Texto de la actividad

Considere las siguientes ecuaciones:

1. $x^{n+k} = x^n x^k$
2. $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
3. $\frac{x+y}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$
4. $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

¿Cuáles son los objetos matemáticos sobre los cuales las ecuaciones hablan?

¿Cuáles considera que expresan propiedades verdaderas del tipo de números de los cuales habla?

¿Cómo validaría esa propiedad, en caso de ser verdadera?

¿Cómo mostraría la falsedad de la propiedad, en caso de ser falsa?

Orientaciones para el docente

Es interesante que se discuta sobre qué significado le encuentran a la consigna de "validar". Por ejemplo, pedir que tomen una calculadora, y elijan al azar 5 pares de números reales y calculen $\frac{x+y}{2}$ y lo comparen con el resultado de $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$. Es el hecho de que los resultados coincidan una validación aceptable?

Actividad 8

Objetivo: Alentar una discusión sobre el valor de verdad de una propiedad algebraica según los campos numéricos involucrados, poniendo énfasis en el significado de validar y/o refutar una propiedad.

Texto de la actividad

Considere las siguientes expresiones. Señalen las que consideran equivalentes.

$\frac{x+2y-4}{2}$	$1/2(x+2y-4)$	$1/(2x+4y-8)$
$2x+2y-2$	$(1/2)\ (x+2y-4)$	$x/2+y-2$

Orientaciones para el docente

El trabajo de validación de la selección de expresiones equivalentes se puede concluir con un listado de propiedades algebraicas que permitan sistematizar las manipulaciones realizadas.

Otra opción para validar esta actividad se puede utilizar Geogebra. Por ejemplo se pueden graficar las curvas que se obtienen al igualar la expresión a un número particular, por ejemplo comparando $0=(x+2y-4)/2$ con $0=\ (1/2)\,x+y-2$. Luego se puede discutir que sentido tiene esta acción en relación a la validación. .

Se sugiere ampliar esta actividad con otro tipo de ejercitación que permita adquirir alguna destreza en la manipulación de expresiones algebraicas, pero evitando el trabajo mecánico, automatizado y desprovisto de significado.

Actividad 9

Objetivo: Que el estudiante pueda comenzar a construir sentido a la variación lineal expresada en una función.

Texto de la actividad

Cada situación corresponde con un tanque que contiene líquido y varía su contenido de manera constante y en un sólo sentido (se llena o se vacía). Para cada caso debe encontrar una recta en un sistema cartesiano que represente matemáticamente la dependencia de la cantidad de líquido con el tiempo.

Situación 1: El tanque está vacío cuando se comienza a tomar el tiempo, y se termina de llenar con 1000 litros después de 20 minutos.

Situación 2: El tanque tiene 20000 litros cuando se comienza a tomar el tiempo, y se termina de vaciar en 5 horas.

Situación 3: El tanque tiene 2000 litros cuando se comienza a tomar el tiempo, y se llena a razón de 100 litros por minuto, durante 20 minutos.

Situación 4: El tanque tiene 2000 litros cuando se comienza a tomar el tiempo, y pierde su contenido a razón de 100 litros por minuto.

Actividad 10

Objetivo: Que el estudiante se enfrente a una experiencia de modelización que implica abordar una situación abierta en relación a las estrategias de resolución, disponiendo de entornos virtuales para experimentar con posibles respuestas.

Texto de la actividad

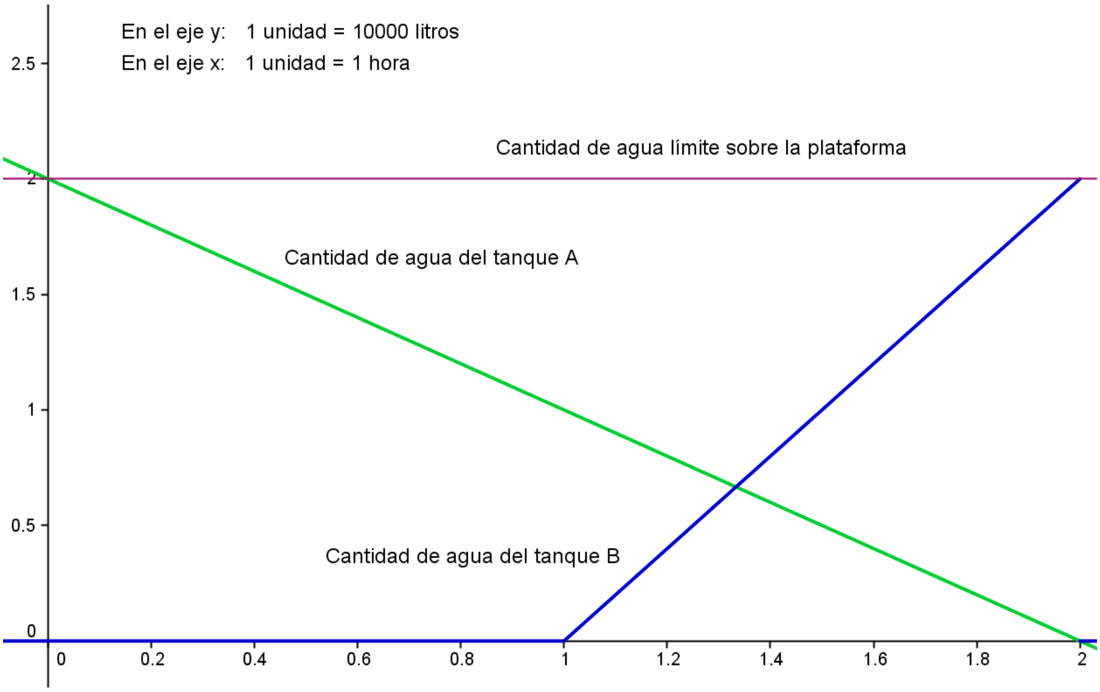
Se poseen dos grandes tanques (A y B) de almacenamiento de agua, de 20000 litros cada uno, sobre una plataforma que los contiene a ambos, y que soporta hasta 20000 litros. Superado este límite, la misma puede ceder provocando la caída de los tanques. El tanque A, que se encuentra lleno, puede perder todo su líquido en 2 horas, mientras que el tanque B, que se encuentra vacío, puede llenarse en 1 hora. Tanto el proceso de vaciado del tanque A como el de llenado del tanque B se realizan con flujo constante de líquido, y se tiene la posibilidad de interrumpir de manera independiente los procesos tantas veces como se quiera.

.

Debe diseñar una estrategia para lograr tener la mayor cantidad posible de agua disponible en el tanque B en el menor tiempo posible, respetando la limitación de la cantidad total de líquido que soporta la plataforma, teniendo la posibilidad de vaciar el tanque A para lograr respetar esta limitación.

Orientaciones para el docente

Se sugiere que la/las soluciones sean buscadas con un graficador, explorando la manera de definir funciones por partes. La idea es que comiencen a explorar soluciones sencillas con el graficador, utilizando sólo el concepto de recta como representación de un fenómeno que varía de manera uniforme. Por ejemplo, una solución (poco óptima) es esperar una hora de vaciado del tanque A antes de comenzar a llenar el tanque B:

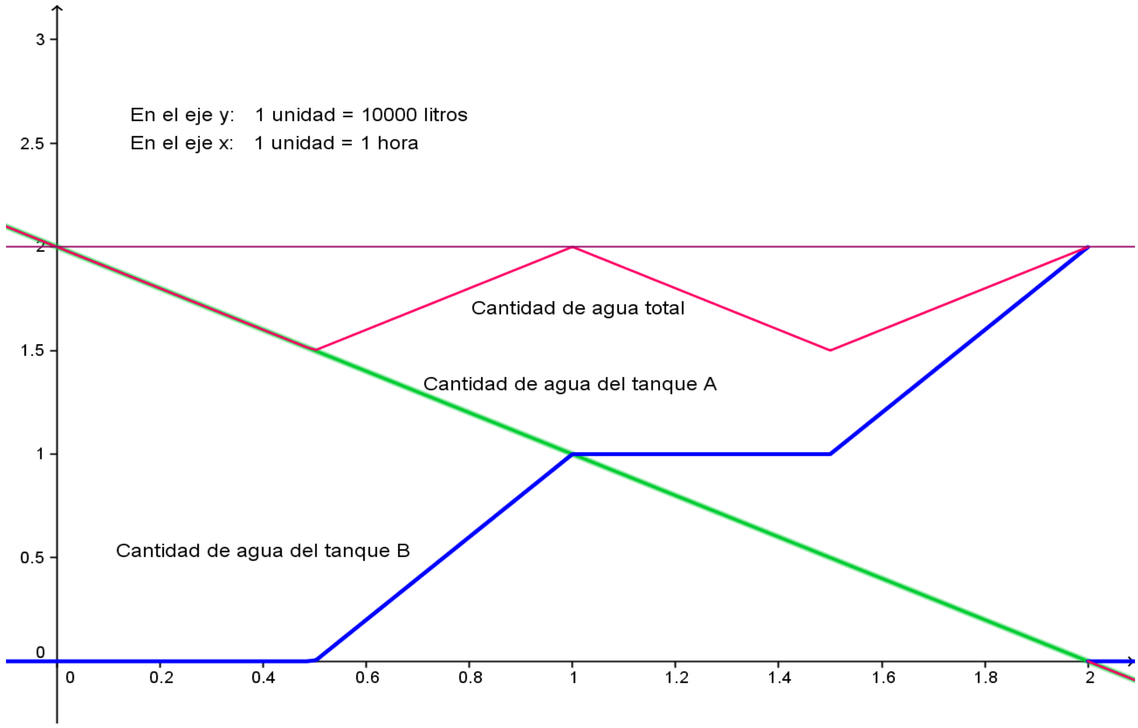


Para poder explorar soluciones más óptimas (es decir, que logren hacer entrar agua en el tanque B sin esperar una hora) es necesario que puedan definir funciones por partes. Por ejemplo Geogebra ofrece la siguiente herramienta: la función

$$f(x) = (0 < x < 1)\, g(x) + (1 < x < 2)\, h(x)$$

representa la función definida por partes, que vale $g(x)$ en el intervalo (0,1), y vale $h(x)$ en el intervalo (1,2).

Se sugiere dar el tiempo necesario para que los estudiantes exploren distintas herramientas de Geogebra. Además deberán experimentar con los desplazamientos horizontales de una recta. El siguiente gráfico representa una solución un poco más óptima:



Actividades propuestas para el eje:

Los conjuntos numéricos

Las propiedades elementales de las operaciones de cada conjunto numérico. Los campos numéricos y sus operaciones en relación a la resolución de ecuaciones algebraicas.

Actividad 1

Objetivo: Que el estudiante perciba el número natural en su naturaleza abstracta, visitando las posibles representaciones de los mismos en distintas bases de numeración.

Texto de la actividad

Para esta actividad se necesitarán fichas (de cualquier tipo, por ejemplo fichas de un juego o simplemente recortadas de un cartón más o menos grueso). Se necesitan 60 fichas por grupo.

Comenzar la actividad revisando con el grupo clase la idea de “unidad”, “decena”, “centena”, etc., para poder abstraer sobre el rol del número 10 en la representación decimal. Luego repartir por grupo las fichas y pedir que las ubiquen en “pilas” de manera de poder expresar la representación en base 10 de un número natural. Por ejemplo , para el 45 formaríamos las pilas:

Luego pedir que utilicen esta representación para deducir la escritura en base 5 del 45. Posteriormente pedir que conviertan a otras bases y pedir otros números. Discutir cuándo una distribución en montones representa la representación en esa base de un número. Por ejemplo, una pila de diez cartas y 11 “pilas” de una carta no representan al número 21.

Actividad 2

Objetivo: Que el estudiante perciba el número racional en su naturaleza abstracta, visitando las posibles representaciones de los mismos como fracciones

Texto de la actividad

El siguiente problema se puede leer en un texto Distribuido por el Ministerio de Educación de la CABA[4].

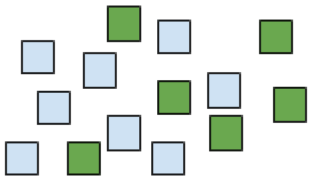
“Los albañiles han pintado ⅝ de la pared rosa, y ¼ de la pared gris. El resto no está pintada todavía.

A. ¿Qué porción de la pared está pintada?

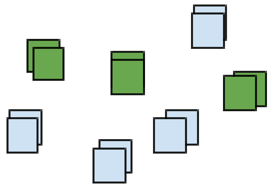
B. ¿Qué parte no está pintada?”

Imaginen que son maestros de 5to grado que deben presentar el problema en su grado. Reunidos en grupo, discutan cómo abordarían la actividad utilizando tarjetas de colores para manejar representaciones como las que se observan en la figura.

4 Fracciones y Números Decimales. 5to grado. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Ministerio de Educación.



8/14



4/7

Actividad 3

Objetivo: Que el estudiante perciba el número real en su naturaleza abstracta, visitando las posibles representaciones de los mismos en notación decimal y como razón.

Texto de la actividad

A Encuentre números reales que satisfagan (uno por item):

1. El número está entre 0.33 y $\frac{1}{3}$.
2. El número está entre 0.33 y 0.34.
3. El número está entre $\frac{10}{33}$ y $\frac{10}{32}$
4. El número está entre 0.99 y 0.991

B Responda en cada ítem: ¿qué número es más grande?

1. $\frac{10}{33}$ vs. 0.3
2. $\frac{1}{3}$ vs $\frac{2}{5}$
3. $\frac{2}{5}$ vs $\frac{4}{11}$

Explique qué estrategia utiliza para responder el interrogante.

C Suponga que se le da una lista de números reales entre 0 y 1 representados de manera decimal mediante expresiones de la forma: $0.d_1d_2d_3 \ldots$ (puede estar el 1, cómo?). El argumento de diagonalización de Cantor ofrece una manera de encontrar un número entre 0 y 1 que sea distinto a todos los de la lista. Consiste en lo siguiente. Si la lista tiene n números, formamos el número

$$0.a_1a_2 \ldots a_n$$

Donde a_i se obtiene sumando 1 al i-ésimo decimal del múmero i-ésimo de la lista. Si tal dígito es 9, entonces $a_i = 0$.

Aplique el argumento de diagonalización de Cantor a la lista:

0.02159

1/3

0.239

0.1295007

$\pi - 3$

0.0056193

0.02

0.29060015

$e - 2$

Actividad 4

Objetivo: Que el estudiante perciba el número real y racional en su naturaleza abstracta, trazando relaciones entre posibles representaciones de los mismos.

Texto de la actividad

Observe la siguiente transformación de un número con representación decimal periódica en una fracción.

R = 0,2394949494…

100 * R = 23,949494…

100 * 100 * R = 10000 * R = 2394,949494…

10000 * R - 100 * R = 2394,949494… - 23,949494…

9900 * R = 2371

R = 2371/9900

Desarrolle un texto donde explique de manera detallada un método que permita transformar cualquier número que se encuentra en representación decimal periódica en una fracción.

Actividades propuestas para el eje:

Problemáticas y paradojas relacionadas con la cardinalidad

Lo finito, lo numerable, lo no numerable. La cardinalidad de los distintos campos numéricos. Las paradojas relacionadas con lo infinito y su abordaje histórico.

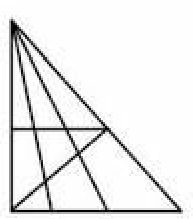
Actividad 1

Objetivo: Que el estudiante se enfrente al desafío de hallar estrategias para numerar conjuntos, desarrollando así una intuición para luego abordar el concepto de “conjuntos no mumerables”.

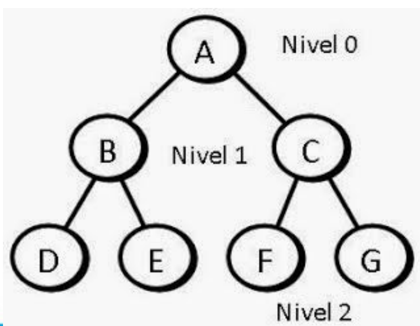
Texto de la actividad

Diseñe una estrategia para numerar los siguientes conjuntos. En el caso que sea posible liste todos los individuos del conjunto comenzando por el individuo al que se le asignó el número 1, siguiendo por el 2, etc.

- Todos los números naturales que se pueden formar con los dígitos 0 y 1.
- Todos los triángulos inscriptos en la figura:



- Todos los caminos de la raiz a las hojas de un árbol de n niveles.



- Los elementos del conjunto

$$A \quad = \quad \{n : \ n \ es \ un \ número \ natural \ menor \ que \ 10\} \times \{1, 2\}$$

- Los elementos del conjunto

$$A \quad = \quad \{n : \ n \ es \ un \ número \ natural\} \times \{1, 2\}$$

Orientaciones para el docente

Se sugiere discutir qué entienden por numerar. Poner énfasis en las propiedades básicas de una numeración:

- Garantía de que a todos los elementos del conjunto se le asigne un número (no queda ningún individuo sin identificar)
- Garantía de que la estrategia no lleva a dar dos veces un número al mismo individuo (un número identifica sólo un individuo)

Destacar el hecho de que salvo por las limitaciones humanas, el acto de numerar tiene sentido para conjuntos infinitos. Inducir la definición: A es numerable sii se puede definir matemáticamente una función $f : N \to A$ que cumpla las condiciones de numeración (o sea que sea biyectiva).

El primer conjunto puede ser numerado de la siguiente manera:

- (Números de 1 dígito) Primero: 0, Segundo: 1
- (Números de 2 dígitos) Tercero: 10, Cuarto: 11
- Luego los números de 3 dígitos y así sucesivamente. Se debe pensar una estrategia para ordenar los números de k dígitos. Por ejemplo se puede numerar primero los que poseen un único 1 y los demás ceros (hay sólo uno: 100...0), luego los que poseen dos dígitos "1":
    - 10...0001
    - 10...0010
    - 10...0100
    - ...

Si el primer caso de pares ordenado fue numerado con el orden:

(1,1), (2,1), (3,1), ...(9,1), (1,2), (2,2), (3,2), ... (9,2),

entonces tal estrategia no permitirá numerar el último item. Habrá que proponer:

(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), …, (9,1), (9,2), ...

Actividad 2

Objetivo: Que el estudiante se enfrente al desafío de hallar estrategias para numerar conjuntos, desarrollando así una intuición para luego abordar el concepto de "conjuntos no mumerables".

Texto de la actividad

Diseñe una estrategia para numerar el siguiente conjunto:

$P(X) = \{A : A \subseteq X\}$, donde $X = \{1, 2, 3\}$.

Luego extienda la estrategia para cualquier X finito

Teorema: Los siguientes conjuntos son numerables:

1. *El conjunto formado por los números racionales*
2. *El conjunto formado por todos los subconjuntos finitos de naturales. Tal conjunto es denotado mediante* $P_F(N)$

Teorema: $P(N) = \{A : A \subseteq N\}$ *no es un conjunto numerable.*

Demostración: La demostración de este resultado utiliza el argumento de diagonalización, y responde al mismo espíritu que el argumento utilizado para demostrar que no se pueden numerar los números reales del intervalo [0,1] .

Supongamos que $P(N)$ es numerable. Entonces existe una biyección $f : N \to P(N)$. Vamos a definir un conjunto que nos va a llevar a una contradicción. Sea

$$A = \{n \in N : n \notin f(n)\}$$

Entonces como f es sobre, existe n_0 tal que $f(n_0) = A$. La contradicción surge al preguntarse si $n_0 \in A$.

Si $n_0 \in A$, entonces $n_0 \in \{n \in N : n \notin f(n)\}$, luego $n_0 \notin f(n_0) = A$. Contradicción.

Si $n_0 \notin A$, entonces $n_0 \in \{ n \in N \ : \ n \in f(n)\}$, luego $n_0 \in f(n_0) = A$. Contradicción.

Teorema: El conjunto de los números reales no es un conjunto numerable.

NOTAS LÓGICO-MATEMÁTICAS I: Las reglas de reducción al absurdo y análisis por casos.

Las “demostraciones matemáticas”, aunque son objetos de gran complejidad, representan una herramienta de desarrollo y validación del saber matemático de la cual no podemos prescindir para el desarrollo de cierto tipo de matemática. Por eso es imprescindible que en el marco de la formación del docente en matemática comencemos a ponerle nombre a los fenómenos que suceden cuando se realiza una demostración, entrando así en el campo de conocimientos que se denomina metamatemática o, simplemente lógica matemática.
Una rama importante de esta disciplina es la teoría de la demostración, en donde se introducen sistemas que intentan formalizar (convertir en objeto matemático) a la demostración. Tal objeto, tal como lo hemos desarrollado en el teorema anterior, responde a un sistema formal llamado deducción natural, que está compuesto de reglas entre las cuales podemos destacar dos reglas fundamentales, que hemos utilizado en la mencionada demostración.

Regla de reducción al absurdo:
Si suponemos P y llegamos a una contradicción, entonces vale $\neg P$

Regla de análisis por casos:
Si vale $P \vee Q$, y además:

De P deduzco R y

De Q deduzco R

Entonces vale R

Regla del tercero excluido
Para cualquier proposición P se tiene que vale P o vale $\neg P$

Actividad: Analizar la demostración de la no numerabilidad de los números reales, identificando la aplicación de las reglas descriptas en esta nota.

Actividad 3

Objetivo: Que el alumno desarrolle las capacidades de oralidad y lectura de textos no matemáticos.

Desarrollo de la actividad

Lectura del cuento El Libro de Arena, de Jorge Luis Borges. Discusión sobre la cardinalidad del número de páginas del libro objeto del relato.

NOTAS LÓGICO-MATEMÁTICAS II: La Teoría de Cantor y la hipótesis del continuo

Durante milenios la sola mención del infinito produjo un completo rechazo en la comunidad de científicos ligados a la matemática, en tanto se lo consideraba un peligroso productor de paradojas, que podrían poner en riesgo el edificio de la matemática. Uno de los hechos que más desconcertaban a los matemáticos, es que un conjunto infinito puede ser "igual" a una parte propia del mismo. El lector reconocerá que la función $f(n) = 2 * n$ constituye una biyección entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números naturales pares.

El estado de incertidumbre frente al infinito se sostuvo hasta entrado el siglo XIX, momento en que el matemático Georg Cantor establece un marco teórico que permite abordar con toda la certidumbre del método matemático la cuestión de los infinitos, que son muchos y complejos, al menos desde el punto de vista abstracto que nos ofrece el universo de los objetos matemáticos. Que el problema de la existencia y las leyes que rigen la infinitud haya quedado bajo la regulación de los procedimientos matemáticos no liberó a los científicos de cuestionamientos filosóficos y matemáticos relevantes, muchos de ellos aún de plena vigencia.

Uno de los más trascendentes es la **hipótesis del continuo (HC)**, producto de estar incluido en los 23 problemas que el matemático David Hilbert propuso en 1900 en un fallido intento de completa fundamentación de la matemática. La HC propone que todo subconjunto de los números reales tiene el cardinal del conjunto de los naturales, o tiene el cardinal de los reales. Esto es, no hay ningún cardinal intermedio entre el cardinal de N (llamado aleph 0 y denotado χ_0) y el cardinal de R.

Por esos tiempos ya habían surgido axiomatizaciones de la teoría de conjunto, entre las que se destacaron las conocidas como axiomatización de Zermelo-Fraenkel y la axiomatización de Godel-Bernays. Puesto en este contexto, Hilbert planteó que desde cualquiera de estas axiomatizaciones se podría probar la HC.

Grande fue la sorpresa cuando los matemáticos Kurt Godel y Paul Cohen demostraron que la HC no puede ser probada ni refutada desde ninguna de las axiomatizaciones de la teoría de conjuntos: es un axioma independiente. Tanto podemos suponer que no hay ningún cardinal intermedio entre χ_0 y el cardinal de R, como podemos suponer que hay uno y 10 o los que se quieran. La matemática no se pondrá en riesgo por esa suposición, por lo menos más en riesgo de lo que ya está.

Bibliografía

Biggs, Norman (1998), Matemática Discreta, Editorial Vincent-Vives.

Fioriti, G. y Sessa, C. (coords.) (2015) Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas. Incorporación del programa GeoGebra al trabajo matemático en el aula. Editorial Universitaria (UNIPE).

Gentile, Enzo (1965), Notas de Álgebra, Editorial Eudeba. Reedición en la Serie A Fas. 22 de los Cursos y Seminarios de Matemática del Dto. de Matemática de la Universidad de Buenos Aires.

Kisbye, P, Miatello, R, Notas de Álgebra I/Matemática Discreta, http://www.famaf.proed.unc.edu.ar/pluginfile.php/14427/mod_resource/content/7/AlgI-MDI-2004.pdf

Martínez, G, Piñeiro, G. (2010), Godel para todos. Editorial Destino.

Podesta, R, Tirao, P. Álgebra. (2017) Una introducción a la Aritmética y la Combinatoria. Versión Preliminar. Disponible online.

Saiz, I., Gorostegui, E. y Vilotta, D. (2011) Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales. Educ. mat. vol.23 no.1 México jun. 2011.

Sessa, C. (2005) Iniciación al Estudio Didáctico del Álgebra, Libros del Zorzal.

Van Dalen, D. (1994) Logic and Structure, Tercera edición, Springer Verlag.