

MATEMÁTICA para la FORMACIÓN DOCENTE

Articulación DGES - FAMAF¹

Unidad curricular: MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Objetivos

El objetivo general de este taller es que los estudiantes se enfrenten a situaciones simples en las que deban recurrir a procesos de modelización. Lo importante en ese sentido, es que transiten por la experiencia de modelización más que en el desarrollo de contenidos curriculares; los contenidos aparecen como herramientas para la acción.

En particular, se pretende que los estudiantes sean capaces de:

- Desarrollar capacidad de observación, imaginación, abstracción y creatividad para abordar nuevas situaciones.
- Identificar las representaciones óptimas para resolver un problema y seleccionar los recursos materiales apropiados.
- Manipular las distintas representaciones obtenidas y controlar los cambios que esto significa en otra representación disponible.
- Escribir pequeños textos argumentativos para justificar ideas o procesos de modelización.
- Utilizar adecuadamente el lenguaje oral, gráfico, escrito y simbólico de la Matemática para expresar conceptos y explicar procedimientos, desde una actitud crítica y constructiva sobre las producciones propias y ajenas.
- Aprovechar las distintas situaciones que se presenten para sintetizar y afianzar conceptos aprendidos en sus trayectos escolares, dándoles mayor grado de formalidad propia de la matemática.
- Cuestionar la validez y generalidad de afirmaciones propias y ajenas en relación al conocimiento matemático, así como el alcance y validez de los modelos matemáticos.

Fundamentación

Se considera que “problematizar” y “modelizar” son procesos que se implican recíprocamente, reflejando el carácter dinámico de la Matemática y funcionando en forma cíclica e integrada. Asimismo, la modelización matemática es el proceso de describir en términos matemáticos un fenómeno (real o de la misma matemática), a partir de la problematización de la situación, obteniendo resultados matemáticos, y la evaluación e interpretación de la misma.

Para esta unidad curricular se propone el trabajo colaborativo, en los que se analizan procesos contruidos a partir del establecimiento de relaciones entre las situaciones planteadas y las ideas matemáticas, donde los estudiantes puedan experimentar, conjeturar y de esta forma “hacer” matemáticas. De este modo se acentúa la idea de la matemática como una actividad humana, de carácter social.

Descripción de la propuesta

La propuesta presenta posibles situaciones a ser modelizadas. Se proponen situaciones en contextos de realidad y semirrealidad, como así también de matemática pura. Cada situación es independiente a la otra y, si bien se sugiere comenzar con la Situación 1, las demás no tienen un orden establecido. La selección de las situaciones a llevar adelante en el taller se hará en función de las características del grupo de estudiantes. No es necesario que se realicen todas las situaciones aquí presentadas, asimismo se pueden proponer trabajos de modelización a partir de otras situaciones que surjan del grupo de estudiantes. En particular, se proponen las siguientes situaciones:

Situación	Modelización	Eje/s posible/s
El cuadrado que cumple años	Intramatemática	Modelos aritméticos y algebraicos
Los zapatos del gigante	Extramatemática	Modelos aritméticos y algebraicos Modelos geométricos
El problema del cordón	Extramatemática	Modelos aritméticos y algebraicos Modelos geométricos
La basura	Extramatemática	Modelos aritméticos y algebraicos
Rampas	Extramatemática	Modelos geométricos

Cambios climáticos y calentamiento global	Extramatemática	Modelos probabilísticos y estadísticos
---	-----------------	--

Los ejes en los que se enmarcan los posibles contenidos curriculares emergentes son los descritos en el Diseño Curricular: “Modelos aritméticos y algebraicos”, “Modelos probabilísticos y estadísticos” y “Modelos geométricos”. Los contenidos puestos en juego (como así el eje de trabajo) dependerán de los caminos de solución que tomen los distintos grupos de estudiantes.

Como metodología se sugiere el trabajo en grupos en formato taller fomentando en los estudiantes la realización de procesos de modelización matemática.

¿Cómo guía el docente este proceso? El trabajo del profesor es acompañar el trabajo de los estudiantes teniendo en cuenta ciertos momentos en particular. En esos momentos, deberá proponer preguntas que orienten a la consecución de un modelo matemático pertinente para la situación planteada:

Observación y experimentación: Consiste, básicamente, en la identificación de un problema, fenómeno o conjunto de fenómenos particulares susceptibles de ser modelizados. Se puede dejar que los estudiantes elijan el problema o situación a modelizar, o que sea el docente el que propone el tema. En esta propuesta, es el docente quien les presenta el tema.

Delimitación del problema: Todo problema o fenómeno presenta inicialmente un conjunto de elementos y variables que deben ser modelados. El docente debe buscar las estrategias de tal manera que promueva en los estudiantes decisiones para la delimitación de las cantidades que intervienen y la simplificación del fenómeno de acuerdo con las exigencias del grupo.

Selección de estrategias: El docente debe acompañar en la decisión sobre las estrategias, recursos, metodologías, que podrían usar los estudiantes con el fin de organizar un trabajo que vaya desde la identificación de variables hasta la construcción de diversos “modelos intermedios” y modelos deseados.

Evaluación y validación: Los estudiantes deben tener presente diversas formas de evaluar la pertinencia del modelo construido; las más comunes son: el cumplimiento de las condiciones con el conjunto de datos obtenidos experimentalmente, la confrontación de sus

resultados con los compañeros, la confrontación con personas especialistas en el tema y las influencias del cambio en los comportamientos de las variables en la consistencia del modelo. La idea, en esta etapa, es que los estudiantes busquen estrategias alternativas de confrontación y validación, y no solo apelen a la autoridad del docente en este aspecto.

En resumen, las intervenciones docentes deberán favorecer la búsqueda de soluciones por parte de los estudiantes y se proponen algunos espacios de institucionalización de conceptos luego del proceso llevado adelante por los alumnos. Para esta instancia de institucionalización se presentan anexos teóricos que pueden ser trabajados con los estudiantes.

En relación a los tiempos, es necesario pautar fechas de entregas (o instancias en donde deben tener resultados provisorios para la discusión); sin embargo, estas fechas deben considerar los tiempos de desarrollo de un proceso de modelización, es decir, cada situación se trabajará en varias clases. Incluso la etapa de escritura debería estar contemplada en la secuencia de actividades a realizar en el aula. Es importante recordar que el principal objetivo de este espacio curricular no es que aprendan más contenidos matemáticos sino que se focaliza en aprender a “hacer matemática” desde la modelización.

Otro aspecto a tener en cuenta es el uso de diversos recursos tecnológicos (digitales o no) dependiendo de la necesidad: uso de material manipulable, sistematización de datos en software de planillas de cálculo, gráfico de funciones o gráficos estadísticos utilizando algún software, uso de editores de texto (Word, drive), videos, formularios Google Forms para relevamiento de datos, herramientas TIC como soporte para presentaciones orales (Powerpoint, Prezi), etc.

¿Cómo se evalúa el proceso?

El formato taller tiene características particulares en términos de evaluación. El taller es un dispositivo que permite que los estudiantes participen de procesos de auto-evaluación y la co-evaluación, valorando los errores como instancias centrales del proceso de aprendizaje. Es por ello que se propone una evaluación gradual y permanente, intentando favorecer la participación activa de los estudiantes, donde se generen espacios de debates críticos, exposiciones, presentación oral de las producciones realizadas en la clase. Estas instancias

evaluativas pretenden poner el acento en el desarrollo de la oralidad, en la calidad del trabajo grupal y aporta a la co-evaluación.

Los informes y las presentaciones orales pueden tomar la forma de Trabajos Prácticos evaluables, como instancia de evaluación formal, para los cuales se deberán tener en cuenta criterios de evaluación. Como ejemplos de criterios a valorar en un proceso de modelización se pueden considerar los siguientes aspectos: descripción concisa y clara de la formulación del problema, adecuada recolección y organización de la información, selección pertinente de las variables de análisis, pertinencia del modelo propuesto, calidad del análisis del modelo y de las argumentaciones, adecuado uso del lenguaje matemático en diversos registros de representación, utilización de distintos recursos, entre otros.

La evaluación debiera permitir a los estudiantes advertir sus logros y sus dificultades y, al mismo tiempo, alentarlos a asumir la responsabilidad de sus posibilidades de mejora y avance. Por lo tanto, es importante realizar devoluciones escritas luego de cada instancia evaluativa formal. Como se trata de un proceso, los estudiantes deberían contar con al menos dos “recuperatorios” de los informes donde se avance en relación a las devoluciones realizadas por la docente. La presentación de informes de las producciones puede conformar un portafolio personal donde se refleje lo trabajado en las situaciones planteadas y la evolución en términos del proceso de modelización y la escritura de informes.

ACTIVIDADES

Primera situación para que comiencen a trabajar en tareas de exploración, uso de variables, reconocimiento de regularidades, formulación de expresiones que generalicen la situación. Se sugiere trabajo articulado con Elementos de la Aritmética y el Álgebra.

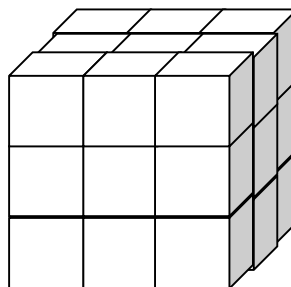
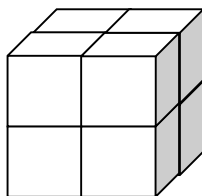
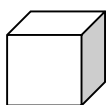
Situación 1: El cuadrado que cumple años

1. Tenemos un cuadrado que tiene un año de edad y mide 1 cm^2 . ¿Cómo será el cuadrado cuando cumpla dos años de edad, si de un año al siguiente su lado aumenta en 1 cm ? Si tomamos un cuadrado de 1 cm^2 como unidad, ¿cuántos cuadrados unidad tendrá el Cuadrado a los dos años?

2. Supongamos que el Cuadrado, al ir creciendo, mantiene el contorno pintado de rojo. ¿Cómo será el Cuadrado a los 3, 4, 5 y 10 años? Organice los datos que obtenga al responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué longitud tiene el lado del cuadrado?
- ¿Cuál es el perímetro del cuadrado cuando va cumpliendo años?
- Mida el área del cuadrado.
- ¿Cuántos cuadrados unidad de los que forman la figura tienen dos lados pintados?
- ¿Cuántos cuadrados unidad de los que forman la figura tienen un lado pintado?
- ¿Cuántos cuadrados unidad de los que forman el forman la figura no tienen ningún lado pintado?
- Encuentre una expresión que responda a los ítems anteriores para cuando el cuadrado tenga n años.

3. Observe los siguientes cubos formados cada uno de ellos por cubos unidad:



Cuerpo 1

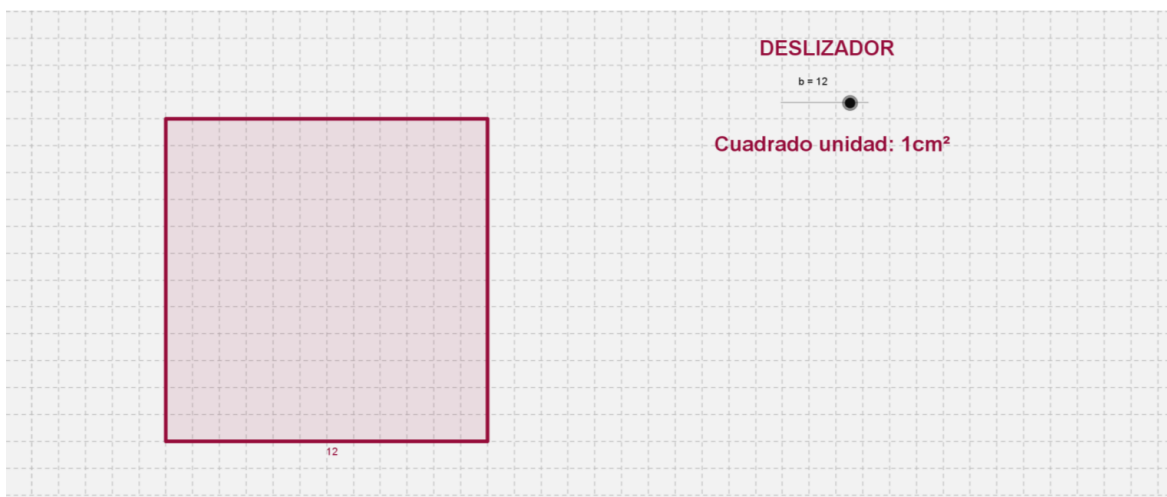
Cuerpo 2

Cuerpo 3

Consigne cuántos cubos unidad necesito para armar los cuerpos 1, 2, 3, 4, n . Si deseo pintar los cuerpos 1, 2, 3, 4, n , ¿a cuántos cubos unidad le pintaré solo 1 de sus caras, a cuántos solo 2 de sus caras, a cuántos 3 de sus caras, o ninguna cara? Construya una tabla con los datos y establezca relaciones. Tenga en cuenta que el cuerpo 1 mide 1 cm^3 . Puede utilizar el applet Diseño de cuerpos geométricos en papel isométrico de la plataforma <http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=125> para graficar los cuerpos 4 a n .

La primera situación se ubica en un contexto puramente matemático. La importancia de comenzar con estas actividades exploratorias es el trabajo con la construcción de expresiones algebraicas que surgen a partir de representaciones geométricas. Como actividades matemáticas se intenta promover la exploración, la sistematización de datos, la generalización de resultados, el uso adecuado del lenguaje simbólico, la validación de fórmulas. Si bien todos los estudiantes llegan a expresiones equivalentes, es interesante que redacten cómo arriban a esos resultados.

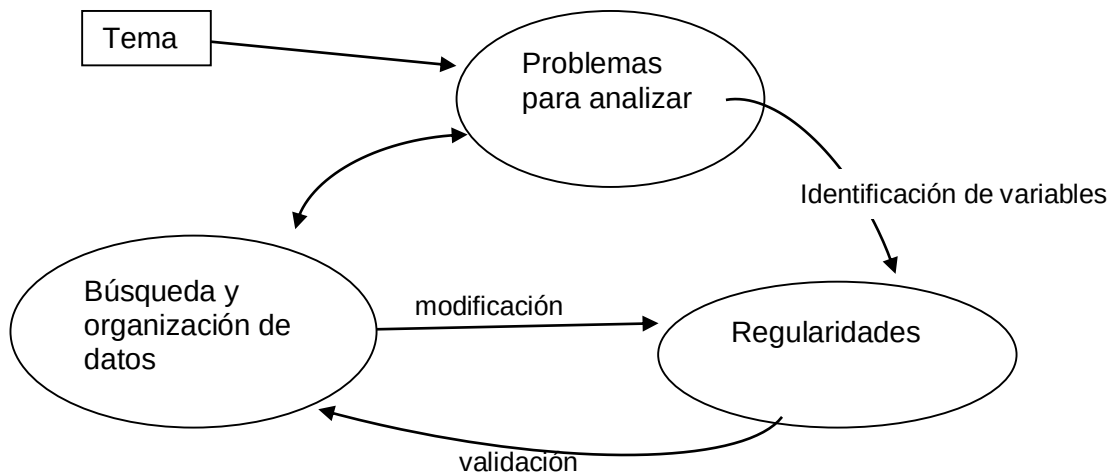
Es importante el uso de recursos manipulables, especialmente al trabajar el problema en 3D. En el caso del ítem 2, se puede presentar un archivo GeoGebra, que muestre dinámicamente el crecimiento del Cuadrado y en donde puedan visualizar las regularidades pedidas. La vista gráfica de GeoGebra se espera sea similar a la siguiente imagen:



Al manipular el deslizador, pueden ir visualizando la cantidad de cuadrados unidad que conforman un Cuadrado de cierta “edad”, así como también la cantidad de lados pintados de cada uno de esos cuadrados unidad. (En anexo 4 encontrará posible protocolo de construcción en GeoGebra).

A partir de la discusión y análisis de esta primera situación se puede introducir algunas definiciones de lo que es un modelo y un modelo matemático. (Anexo 1)

En relación a la situación planteada, podemos observar que se llevaron a cabo ciertos subprocesos:



Se sugiere analizar qué matemática trabajamos. A partir de las intervenciones de los estudiantes se espera que surjan conceptos como:

Lenguaje coloquial → Lenguaje simbólico

Expresión algebraica

Término general de una sucesión

Función (a valores discretos, dominio en los naturales)

Tipos de representación: tabla, gráfico, fórmula....

Bibliografía

Alomar, B.; Carreras, M. C. & Dipierri, I. (2013) *Una experiencia con modelización matemática en el contexto escolar*. Trabajo Final de Prácticas Profesionales Docentes. Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación: Universidad Nacional de Córdoba. Disponible en

<http://www2.famaf.unc.edu.ar/institucional/biblioteca/trabajos/6085/16927.pdf>

McCoy, L. (2007) "Authentic Activities for Connecting Mathematics to the Real World", Presentación en National Council of Teachers of Mathematics Regional Conference,

Richmond. Disponible en <https://faculty.sites.wfu.edu/leah-mccoy/wp-content/uploads/sites/14/2014/06/mprojects.2007.pdf>

Situación 2: Los zapatos del gigante

En un centro deportivo en Filipinas, Florentino Anonuevo Jr. está lustrando un par de zapatos. Ellos son, de acuerdo al Libro Guinness de los Records, los zapatos más grandes del mundo, con un alto de 2,37 m y un largo de 5,29 m.



¿Qué altura (aproximadamente) tendrá el gigante que porta estos zapatos?

Establezcan un modelo a través del cual puedan determinar la altura aproximada de una persona conociendo su tamaño de calzado.

En esta situación se comienza respondiendo una pregunta puntual, convirtiendo la situación en un problema. Sin embargo, la necesidad de buscar un modelo para determinar cualquier otro caso lleva a un proceso de modelización.

En el caso de la primera consigna, puede haber un trabajo de anticipación, en el cual se arriesgue una altura a partir de los datos provistos o haciendo uso de elementos de la fotografía (contrastando el tamaño de Florentino). Para encontrar un modelo es posible que deban recurrir a mediciones efectivas de calzados y estaturas, encontrando así algunos patrones promedios. También deberán considerar ciertas variables como por ejemplo qué tipo de calzado van a tomar, cuan ajustado al pie debe ser, si la altura del calzado debe llegar al tobillo, etc.

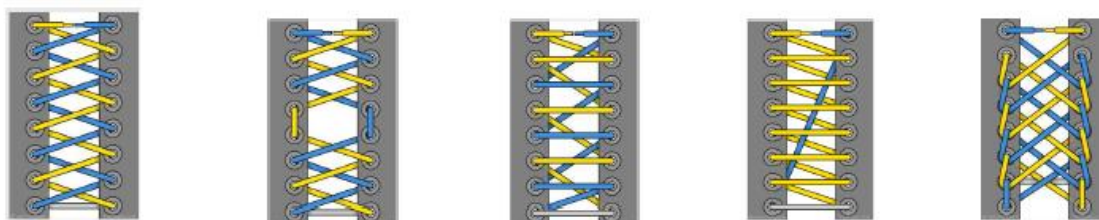
En el caso que hayan determinado en un primer momento una altura para el gigante, una instancia interesante es validar el modelo propuesto corroborando si esa primera respuesta es compatible con el mismo.

Bibliografía

Blum, W. and Borromeo Ferri, R. (2009) MathematicalModelling: Can It Be Taught And Learnt?, en *Journal of MathematicalModelling and Application*, Vol. 1, No. 1, 45-58

Situación 3: El Problema del Cordón

Existen distintas formas de atarse los cordones. Entre las maneras comunes de atar las zapatillas, podemos encontrar:



Posibles formas de atarse los cordones

El estilo que una persona utiliza depende de una variedad de factores, extendiéndose desde la estética hasta la comodidad. Pero, ¿cómo deben ser atadas las zapatillas? ¿hay alguna forma más beneficiosa que otra? ¿de qué depende? ¿Cuántas formas de atarse los cordones hay? Podríamos hacer muchas preguntas...

- Formulen preguntas en relación al tema.
- Planteen el/los problema/s a analizar.
- Realicen la búsqueda de información/toma de datos y sistematicen lo hallado.
- Formulen un modelo que responda a los problemas planteados.
- Redacten un informe donde se presenten todas las instancias en el proceso llevado adelante.

En esta situación se pretende que, a partir de un tema (atarse los cordones), los estudiantes puedan formularse diversas preguntas. En este sentido, la situación es lo suficientemente

amplia como para que surjan diversos contenidos matemáticos, dependiendo de la pregunta a responder. También se tendrá el manejo de distintas variables, dependiendo de las decisiones que tome cada grupo. Como ejemplo:

¿Cuántas formas posibles existen de atarse los cordones que sean adecuadas para correr?

¿Cuánto cordón se usa en cada caso?

¿Cuántas formas posibles existen de atarse los cordones dependiendo del número de ojales?

¿Qué forma de atarse los cordones en una zapatilla de cinco pares de ojales utiliza menos cordón?

¿Cuáles son las formas usuales de atarse las zapatillas utilizadas por los estudiantes del instituto? ¿De qué depende la elección?

Es importante que en el informe escrito se pauten las decisiones y los subprocesos por los que transitaron al trabajar la situación. Para ello se sugiere presentar (al final del trabajo de planteo, sistematización y formulación del modelo) algún esquema de modelización donde se parta de una situación del mundo real. Un esquema de proceso de modelización sencillo es el de Blomhøj (Anexo 2), a partir del cual los estudiantes deberán reconocer en su recorrido los subprocesos transitados.

Situación 4: La basura

Observen el siguiente cortometraje: Cambia tu mundo (corto animado) La animación está disponible en el siguiente link <http://www.youtube.com/watch?v=qCdDPCZfDoE>

Para debatir: ¿Cuál es el mensaje que intenta transmitir el video?

A partir de este video:

- Formulen preguntas en relación al tema.
- Planteen el/los problema/s a analizar.
- Realicen la búsqueda de información/toma de datos y sistematicen lo hallado.
- Formulen un modelo que responda a los problemas planteados.
- Redacten un informe donde se presenten todas las instancias en el proceso llevado adelante.

La intención de esta situación es que partan de un tema y comiencen a plantearse preguntas y problemas al respecto. Esta situación fue tomada del trabajo de Odetti (2013), donde los alumnos plantearon preguntas interesantes para luego formular el problema a modelizar. Entre las preguntas aparecieron:

- ¿Cuánta basura tira cada familia del grupo, dependiendo de cuántos son en ella?
- ¿Cuántas hojas de papel sacamos con un árbol? ¿Cuántos árboles se talan por año? ¿Cuál va a ser la deforestación de acá a 10 años?
- ¿Cuánto plástico se reutilizaría si una familia de cuatro integrantes reciclara todas las botellas que consume en una semana? ¿Cuánto plástico se reutilizaría si todas las familias de Córdoba reciclaran las botellas que consumen durante la semana?
- ¿Cuántos celulares se tiran por año en Argentina y Chile? ¿Cuántos celulares se tirarán en los próximos años?

Algunas de estas preguntas tuvieron que ser retrabajadas para poder efectivamente buscar/recolectar datos. Lo interesante de este trabajo fue que los estudiantes en grupos formulaban el problema por modelizar, definiendo luego las variables consideradas en cada caso (tiempo/cantidad de botellas que consume la familia, cantidad de plástico/m², cantidad de basura/tiempo, etc.) En todos los informes realizados por los grupos “las tablas obtenidas, y por consiguiente los gráficos generados, mostraron un comportamiento lineal de las situaciones estudiadas. La herramienta matemática utilizada para responder a sus preguntas fue la proporcionalidad directa” (Odetti, 2013, p. 42).

En el grupo de estudiantes de Modelización Matemática podrían aparecer otros interrogantes y problemas, se presentan los planteos del trabajo de Odetti solo como ejemplos del abanico de posibilidades que permite desarrollar el tema.

Para el informe escrito, se puede presentar como otra alternativa de esquema de proceso de modelización el presentado por Bassanezi (Anexo 3). De esta forma, los estudiantes podrán elegir el esquema que mejor les permita describir el proceso llevado adelante.

Bibliografía

Odetti, F. (2013). *Estudios de proporcionalidad directa e inversa en diversos ambientes de aprendizaje*. Trabajo Final de Prácticas Profesionales Docentes. Informe final de Metodología y Práctica de la Enseñanza. Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación: Universidad Nacional de Córdoba. Disponible en <http://www2.famaf.unc.edu.ar/institucional/biblioteca/trabajos/6085/16919.pdf>

Situación 5: Rampas

La rampa es un plano inclinado cuya utilidad se centra en dos aspectos: reducir el esfuerzo necesario para elevar un peso y dirigir el descenso de objetos o líquidos.

Las rampas se utilizaron desde la antigüedad: en el antiguo Egipto se empleaban para la construcción ya sea en templos o pirámides, mientras que los romanos generalizaron su uso para el trazado de calzadas y la conducción de agua a las ciudades (acueductos).

Ustedes son un grupo de diseñadores que tienen que elaborar una rampa de acceso para un usuario específico en una construcción edilicia determinada. ¿Qué decisiones tomarían? Construir un modelo matemático para la situación.

Para la presentación del esquema y de la rampa se sugiere el uso del software SketchUp o algún software de diseño.

En esta situación los estudiantes deben sentirse convocados a definir un problema en relación a esa situación y que se corresponda a un lugar específico donde construir la rampa. Si bien puede que busquen información en internet u otros medios en relación a la construcción de rampas de acceso, la situación provoca que se enfrenten a una problemática donde la recolección de datos se haga en forma experimental, lo cual implica un trabajo con la medida y la medición. Los estudiantes deberán determinar qué variables, condiciones, datos, etc., serán necesarios para llevar adelante la resolución de la situación problema.

El modelo al que generalmente llegan es geométrico, aplicando teorema de Pitágoras en la mayoría de los casos o uso de razones trigonométricas. También puede aparecer la variable costos, lo que lleva a considerar modelos aritméticos.

Bibliografía

Mina, M. y Dipierri, I. (2017) Jóvenes diseñadores de rampas de acceso: aprendiendo matemática en un escenario de investigación con tecnologías. En Fregona, D., Smith, S., Villarreal, M y Viola, F. (eds) *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios: aportes para la educación matemática*. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba, pp. 187-212.

Situación 6: Cambios climáticos y calentamiento global

Lea el siguiente texto extraído de un artículo¹ de Madrid Casado:

“¿Qué es el cambio climático? ¿Hay o no hay cambio climático? En verdad, siendo precisos, el clima cambió, cambia y cambiará, porque se trata de un sistema dinámico, es decir, de un sistema que evoluciona con el tiempo. Así, por ejemplo, a finales del siglo VIII, cuando Erik el Rojo condujo a los vikingos a Groenlandia (Greenland, la Tierra Verde), se encontró con una tierra llena de pastos y carente de hielo, que le incitó a fundar una próspera colonia. A principios del XV, sobrevino la Pequeña Edad del Hielo, que hizo avanzar los glaciares e impidió que los colonos vikingos sobrevivieran. Ésta no ha sido la única fluctuación del clima en nuestra era: si nos remontamos a los primeros siglos después de Cristo, nos encontramos con un periodo de calentamiento que coincidió con la caída del Imperio Romano; o, sin ir tan atrás en el tiempo, desde mediados del XIX, cuando terminó la Pequeña Edad de Hielo, estamos en otro periodo de calentamiento, sólo interrumpido por un leve enfriamiento entre 1940 y 1975 que desató terrores apocalípticos en no pocas conciencias. A mediados de los años setenta, la gran mayoría de ecologistas hablaban de una inminente y catastrófica glaciación. [...] A comienzos del siglo XXI, los ecologistas siguen hablando de cambio climático, pero el

¹Madrid Casado, Carlos M. “Las matemáticas del cambio climático”, Universidad Complutense de Madrid.

sentido de sus denuncias ha experimentado un giro de 180°. Supuestamente nos encontramos en medio de un imparable calentamiento global. Sin embargo, pese a lo extendida que está esta opinión, el calentamiento global no pasa de ser una hipótesis: la hipótesis de que el incremento de los niveles de dióxido de carbono está causando una subida de la temperatura media de la atmósfera a consecuencia del llamado efecto invernadero. Pero los datos son cualquier cosa menos concluyentes, [...]”

Tomando datos de alguna/s ciudad/es que les interese/n en la página <http://www.tutiempo.net/clima/Argentina/AR.html>, ¿pueden inferir que efectivamente hubo aumento de las temperaturas últimamente? Expresen una conclusión.

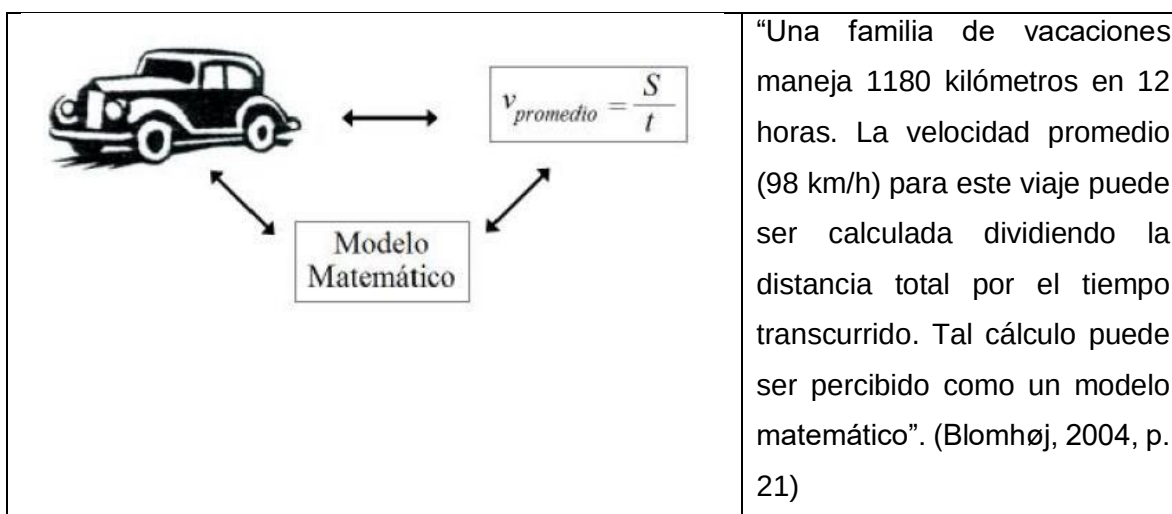
Esta situación es de carácter más abierto ya que deben tomar decisiones en relación a qué ciudades considerar y qué datos relevar en relación a la pregunta que quieran responder. El planteo de la pregunta surge muchas veces de la disponibilidad de datos que tienen en la página. También pueden recurrir a otras fuentes de información para completar el análisis de la situación.

Otro aspecto interesante es el tipo de trabajo estadístico que deberán realizar y la forma de (re)presentar la información, para ello es necesario aportarle herramientas tanto teóricas (nociones de muestra, población, análisis de datos cuantitativos, medidas de resumen, gráficos, etc.) como tecnológicos (uso de software estadístico).

- Anexo I -

¿A qué nos referimos con **modelización matemática**? Varios autores trabajan actualmente sobre este tema, nosotros intentaremos hacer un primer abordaje a esta tendencia en educación matemática.

Para ello, vamos a comenzar desde lo más básico. Veamos un ejemplo (más o menos cotidiano):



Entonces, ¿cómo podemos definir *modelo* y *modelo matemático*? Hay varias definiciones de *modelo*, incluso si consultamos el diccionario de la Real Academia Española, podemos encontrar varias acepciones de la palabra:

- Arquetipo o punto de referencia para imitarlo o reproducirlo.
- Representación en pequeño de alguna cosa.
- Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, como la evolución económica de un país, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.

Nosotros vamos a tomar la siguiente (que coincide con la última acepción de la RAE presentada anteriormente):

“Un modelo es una representación gráfica, esquemática o analítica de una realidad, que sirve para organizar y comunicar de forma clara los elementos que la conforman y sus relaciones”. (Bocco, 2010, p. 8)

Evidentemente, no todo modelo es matemático. En particular, vamos a tomar el caso de un modelo intramatemático (donde el tema y contexto de partida es la misma matemática). Citando a Patricia Sadovsky (2005):

“(…) un proceso de modelización supone en primer lugar recortar una cierta problemática frente a una realidad generalmente compleja en la que intervienen mucho más elementos de los que uno va a considerar, identificar un conjunto de variable sobre dicha problemática, producir relaciones pertinentes entre las variables tomadas en cuenta y transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico-matemático, con el objetivo de producir conocimientos nuevos sobre la problemática que se estudia. (...) Chevallard (1989) reivindica también la noción de modelización para pensar la producción de un sistema matemático a través de otro sistema, también matemático. Lo llama *modelización intramatemática*”. (pp. 26-27)

Bibliografía

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling – A theory for practice. En Clarke, B. y otros. (Eds.). *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education* (pp. 145-159). Suecia. Versión español (traducción María Mina) Disponible en <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10419>

Bocco, M. (2010). *Funciones elementales para construir modelos matemáticos*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica. Disponible en: https://isfdarienters.infod.edu.ar/sitio/upload/Funciones_elementales_para_construir_modelos_matem%EA1tcos_Bocco_2013.pdf

Sadovsky, P. (2005) *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Viola, F. y Equipo de Producción de Materiales Educativos en Línea. (2018). Clase 4. La matemática y su enseñanza en la EDJA: aportes desde nuevas tendencias en educación

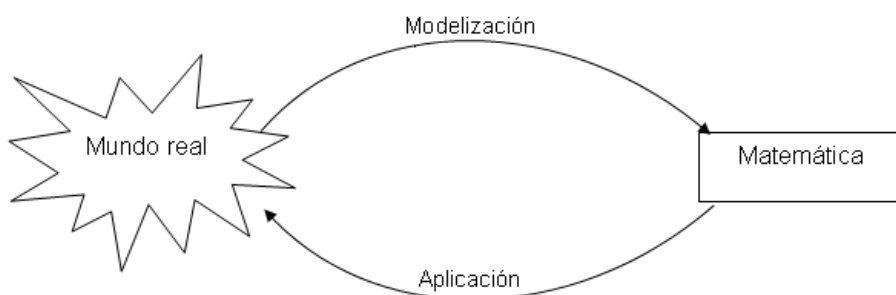
matemática. *Módulo La matemática: su enseñanza en la Educación Secundaria I.* Actualización Docente de Nivel Superior en Educación de Jóvenes y Adultos. Córdoba: Instituto Superior de Estudios Pedagógicos – Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba.

- Anexo II -

En la primera situación, vimos cómo partíamos de un tema matemático para llegar a modelos lineales y no lineales. Pero la modelización entendida en un sentido más amplio, considera situaciones de un mundo no matemático a ser modelizadas:

“Un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática”. (Blomhøj, 2004, p. 20)

Lo importante es que esta relación con el mundo real no se piensa desde la aplicación de un contenido matemático a una situación del contexto no matemático, sino que partiendo de una situación del mundo real se busca el modelo que le dé respuesta a esa problemática. Eso diferencia la modelización de la aplicación:



Blomhøj (2004, pp. 23-24) reconoce, en un proceso de modelización, los siguientes subprocesos:

(a) Formulación del problema: formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada.

(b) Sistematización: selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. Del dominio de investigación resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática.

€ Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.

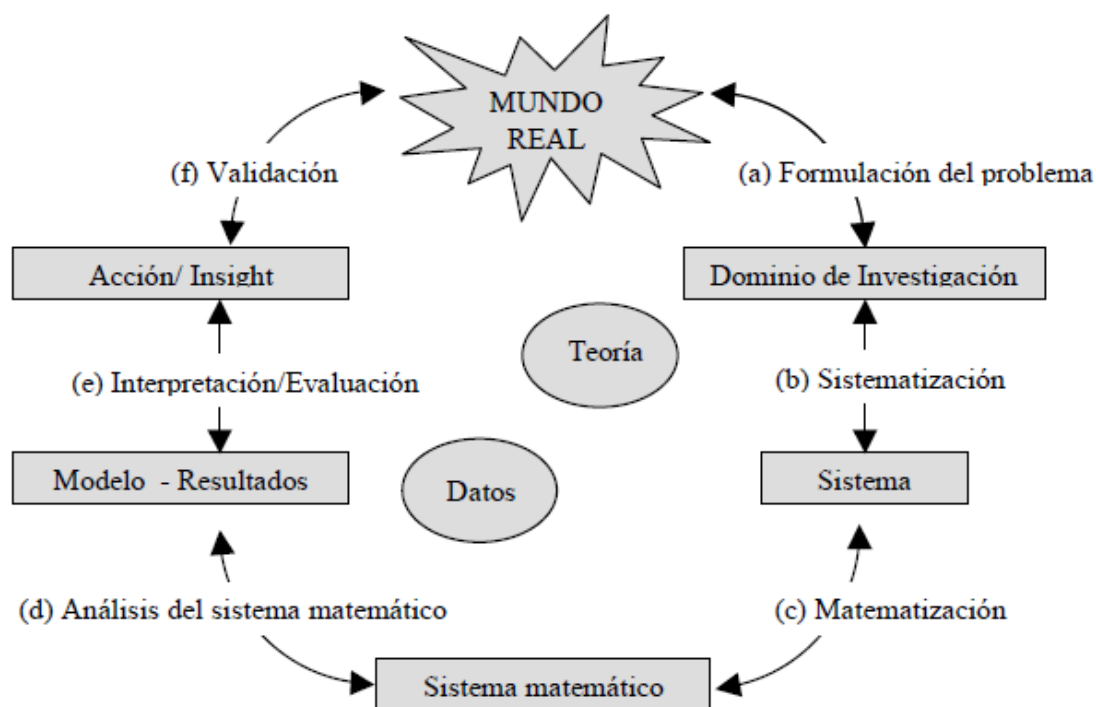
(d) Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.

€ Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.

(f) Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

El proceso de modelización no debería ser entendido como un proceso lineal.

Esquemáticamente:



Bibliografía

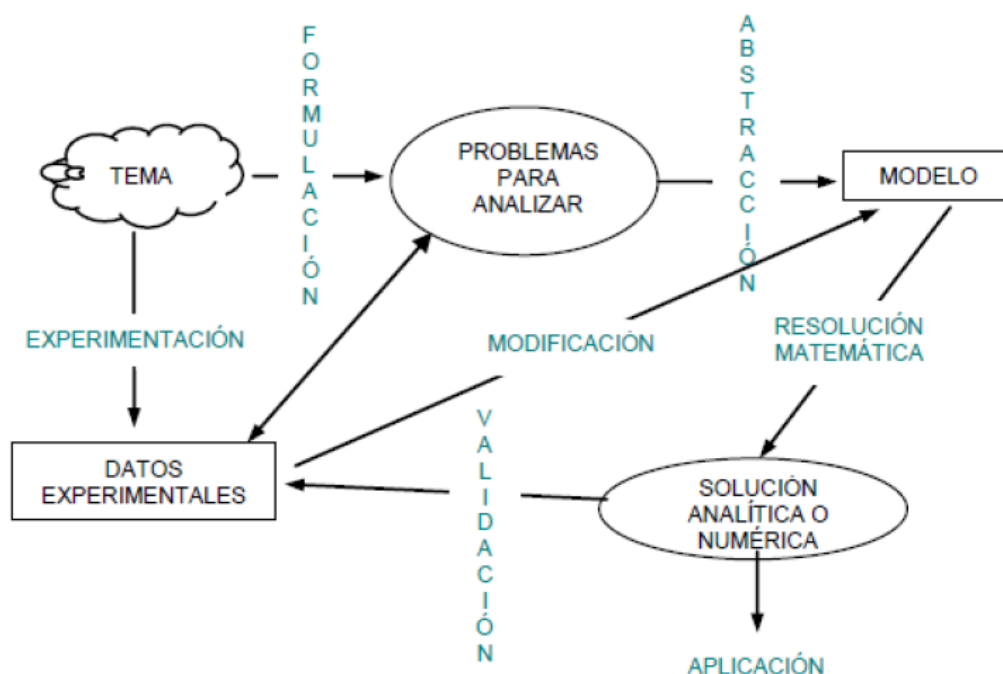
Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling – A theory for practice. En Clarke, B. y otros. (Eds.). *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education* (pp. 145-159). Suecia. Versión español (traducción María Mina)

Disponible en <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10419>

Viola, F. y Equipo de Producción de Materiales Educativos en Línea. (2018). Clase 4. Trabajando la vinculación en el CO. Módulo *La matemática: su enseñanza en la Educación Secundaria II*. Actualización Docente de Nivel Superior en Educación de Jóvenes y Adultos.

- Anexo III -

Otro esquema para pensar en el proceso de modelización es el presentado por Rodney Bassanezi (1994):



Definamos con precisión los diferentes pasajes presentes en el diagrama anterior:

Experimentación: obtención de datos experimentales o empíricos que ayudan a la comprensión del problema, en la modificación del modelo y en la decisión de su validez. Es esencialmente un proceso de laboratorio y/o estadístico.

Abstracción: proceso de selección de las variables esenciales y formulación en lenguaje natural del problema o situación real.

Resolución: el modelo matemático es construido cuando se substituye el lenguaje natural por el lenguaje matemático. El estudio del modelo depende de su complejidad y puede ser un proceso numérico. Cuando los datos conocidos no son suficientes, pueden ser creados nuevos métodos o el modelo debe ser modificado.

Validación: comparación entre la solución obtenida en la resolución del modelo matemático y los datos reales. Es un proceso de decisión de aceptación o no del modelo inicial. El grado de aproximación deseado será un factor preponderante en la decisión.

Modificación: en caso de que la aproximación entre los datos reales y la solución del modelo no sea aceptada, se deben modificar las variables o la ley de formación y, con eso, el modelo original es modificado y el proceso se inicia nuevamente.

Aplicación: la modelización eficiente permite realizar previsiones, tomar decisiones, explicar y entender. Permite participar del mundo real con la capacidad de producir cambios.

Podemos notar en este esquema que el proceso no es lineal, sino que puede tener “idas y vueltas”. Comparte con lo propuesto por Blomhøj en varios aspectos:

- parten de un tema del mundo real (aunque Bassanezi no lo expresa explícitamente en el esquema, sí lo considera en sus trabajos),
- reconocen en el proceso “subprocesos” comunes: formulación del problema, abstracción/sistematización, resolución matemática, validación del modelo.

Si bien diversos autores proponen otros esquemas, la mayoría de ellos comparten la idea de esta relación entre el mundo real y el mundo matemático. Es por eso que se consideran procesos de modelización extramatemáticos (a diferencia de los que propone Chevallard, quien habla de modelización intramatemática).

Bibliografía

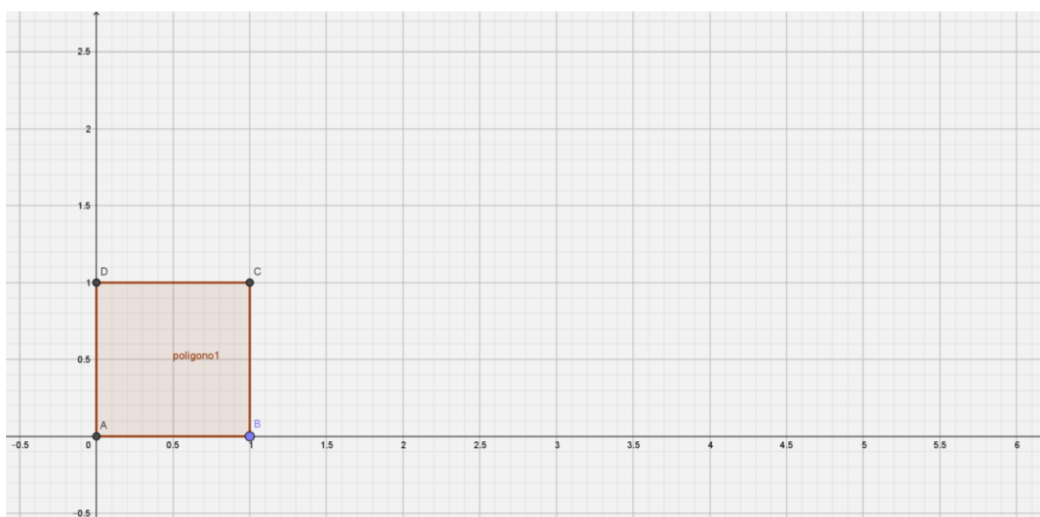
Bassanezi, R. (1994). Modelling as a teaching-learning strategy. For the Learning of Mathematics, 14(2), pp. 31-35.

- Anexo IV -

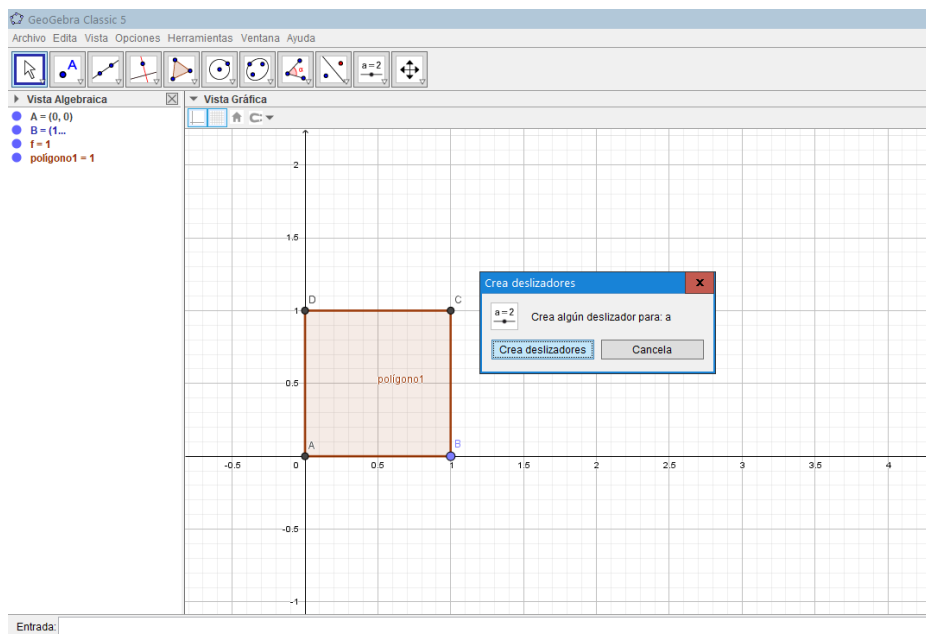
Cuadrado que cumple años- GeoGebra

Una forma de construir el cuadrado y que vaya observándose su evolución, es la siguiente (versión GeoGebra Classic 5):

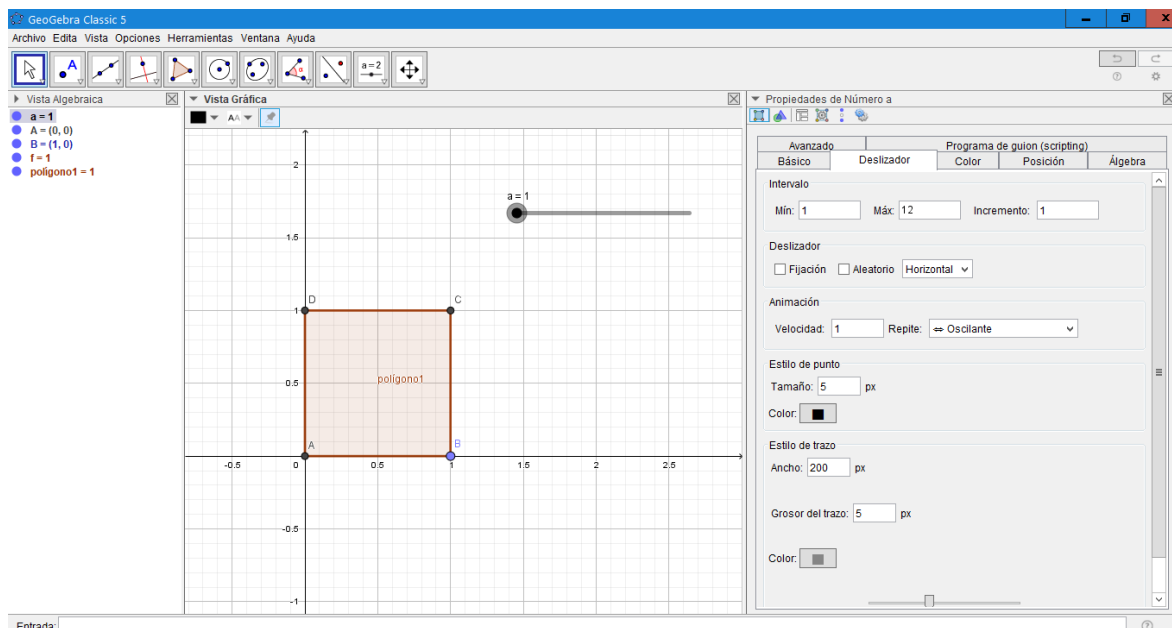
- Abra GeoGebra y en la vista gráfica mantenga el sistema de eje de coordenadas y cuadrícula.
- Con la herramienta Polígono regular, construya un Cuadrado a partir del segmento con extremos en las coordenadas (0,0) y (1,0)



- El punto marcado como B con coordenadas (0,1) es un punto semilibre, por lo tanto puede moverse sobre el eje de las abscisas. En la Vista algebraica, modifique las coordenadas del punto B escribiendo $B=(a,0)$. Automáticamente le aparecerá la ventana solicitando crear deslizador.



- Cree el deslizador y colóquele parámetros Mín 1, Máx 12, Incremento 1 (en Propiedades al clicar botón derecho sobre el deslizador).



- El resto es cuestión de estética, puede agregar texto, cambiar color, quitar ejes de coordenadas, dejar visible solo vista gráfica, etc.

Equipo de trabajo:

Viviana Audisio – Pamela Chirino – Nicolás Gerez Cuevas – Héctor Gramaglia – Natalia Heredia – Fernanda Viola.

Contacto: vgaudisio@gmail.com