MATEMÁTICA para la FORMACIÓN DOCENTE

Articulación DGES - FAMAF

Unidad Curricular: MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LAS CIENCIAS

Objetivos Generales

El objetivo central del taller es poder llevar adelante procesos de modelización que recuperen experiencias de relevancia histórica y epistemológica en el desarrollo de las ciencias. Implica una matemática que surge de largos y trabajosos desarrollos en donde el conocimiento humano logra superar importantes obstáculos epistemológicos.

El llevar adelante este taller implica afrontar varios desafíos. Quizá el principal radica en que debemos metodológicamente sostener la modelización, en particular respetar un proceso gestionado por los mismos estudiantes, pero a su vez debemos abordar los procesos que representaron saltos cualitativos importantes en el desarrollo de la ciencia, con la complejidad que esto implica.

Por otro lado, constituye también un desafío romper formas tradicionales de participación (sólo) como observador del estudiante, y promover una actitud científica al abordar una determinada problemática, no en el sentido del poseedor de sofisticadas herramientas y conceptos; por el contrario, rescatando la actitud de quién se enfrenta a un problema sabiendo que la solución puede ser encontrada en breve o no, quizá de manera incompleta, pero rescatando un proceso lleno de significaciones, conocimientos diversos que se instalan, se revisan, se vuelven a formular, y dan lugar a nuevas preguntas.

Finalmente, es también objetivo del taller incorporar y reforzar la familiaridad del estudiante con herramientas del campo de las TICs que serán fundamentales en su futuro trabajo como docente.

Fundamentación

En las últimas centurias la matemática se ha convertido en el sustrato lingüístico y lógico que acompaña el desarrollo de diversas ramas de la Ciencia y la Tecnología. Este hecho aporta una aproximación interesante al problema del significado de los objetos matemáticos, la cual posee una dimensión pedagógica significativa. El doble juego de formular objetos abstractos que modelen una situación particular, y apelar a esta para dar un sentido dinámico a la creación abstracta, es una manera de proveer significados que complementan el significado denotacional (estático) que provee la misma matemática, y permite generar aproximaciones no tradicionales a importantes conceptos matemáticos.

El enfoque pedagógico-didáctico de la propuesta, sustentado por la modalidad taller, apuesta a reforzar nuevos modos de comprender y hacer matemática, que permitan superar las visiones tecnicistas que son frecuentes en las presentaciones tradicionales de las aplicaciones de la matemática, apostando a una construcción de significados que recupere sentidos dinámicos que puedan ser visualizados y comprendidos a través de modelos en acción, con la asistencia de las tecnologías de la información y la comunicación. En este sentido, el trabajo de modelización pondrá el foco en el desarrollo de marcos explicativos para asistir al trabajo pedagógico, más que en el desarrollo de modelos predictivos con fines científicos.

Descripción de la propuesta

Ejes del Diseño Curricular en los que se inscribe:

<u>Modelos continuos aplicados a la ciencia</u> Estudio de problemáticas científicas representables con modelos continuos. Representación del modelo matemático y resolución del problema matemático asociado. Implicancia de la solución del problema matemático en el problema científico original. Ejemplo: aplicación de ecuaciones diferenciales.

<u>Modelos discretos aplicados a la ciencia</u> Casos de situaciones científicas modelizables con un sistema discreto. Ejemplo: grafos y aplicaciones, cálculo en finanzas y árboles binomiales.

<u>Modelos no determinísticos</u> Casos de problemáticas en donde interviene el cálculo de probabilidades.

Breve recorrido:

En la propuesta se plantean algunas situaciones con referencias a semi-realidad/realidad, induciendo a los estudiantes a introducirse en las mismas a través de una pregunta inicial. Se

espera que el docente acompañe el proceso de modelización para poder dar respuesta a la misma, y en el recorrido lograr construir sentidos en relación al problema general, y a las herramientas matemáticas que se empleen.
Las situaciones demandan tareas de diversos grados de desafío y apertura, para que el docente elija en función de las características del grupo.
Las situaciones intentan ser familiares, refiriendo a problemas relevancia histórica y/o epistemológica. Por sus características, los estudiantes tendrán acceso vía web a mucha información en relación a métodos, fórmulas, simuladores, etc. que les permitan obtener respuesta a la situación planteada. El docente deberá solicitar rigor metodológico para garantizar que los debidos procesos de construcción de sentidos en relación al problema y las metodologías aplicadas

Orientaciones generales para el docente:

En algunas situaciones, por las características de los problemas y los voluminosos desarrollos históricos en relación a los mismo, la etapas de *formulación* y *delimitación del problema* estarán en buena medida ya pautadas. Aquí probablemente el modelo Biembengut-Hein (2004) resultará adecuado, en tanto la situación gira alrededor de un contenido programático concreto (por ejemplo, la situación referida al disparo de armas de fuego, o el problema del movimiento). En este caso, pondremos el foco en la caracterización de las variables esenciales, desarrollo de hipótesis simplificadoras, sistematización de los conceptos, formalización de modelos, interpretación y validación de resultados. En otras situaciones convendrá considerar el modelo propuesto por Bassanezi-Biembengut (1997), para explorar la potencialidad de formular problemas que respondan a los intereses de cada grupo.
Se espera del docente acompañamiento para diversificar los procesos de sistematización a la hora de lograr una representación matemática.
Se espera que se respeten los tiempos de comprensión del problema, elaboración de respuestas provisorias y/o erróneas, para no derivar en una explicación de un método que arrojará una respuesta pero no permitirá develar la complejidad del problema ni la matemática que lo asiste.
Se promueve fuertemente la escritura por parte del estudiante de los procesos que se llevan adelante, apelando a formatos flexibles para que se constituya en una práctica usual. (Por ejemplo, presentaciones manuscritas al finalizar cada encuentro)
Se espera que se generen reformulaciones y/o generalizaciones de las situaciones de orígen.

Breve descripción de las actividades propuestas:

- *Un problema de distancia recorrida*

En esta actividad introductoria se plantea un problema sencillo de cálculo de distancia recorrida a partir de datos de la velocidad, cuya solución requiere que los estudiantes recurran a las herramientas teóricas desarrolladas en Problemáticas del Análisis Matemático II. Aunque esta actividad no ofrece desafío en términos de la formulación del problema, el objetivo principal es poder discutir en relación a las diferentes formas de matematización en función de cómo estén presentados los datos, y familiarizarse con Geogebra como herramienta posible para los procesos de sistematización y matematización. .

- *El problema de ordenar y buscar*

Uno de los problemas centrales que surgen con la llegada de los sistemas computacionales es el de ordenar grandes cantidades de datos para luego poder acceder a ellos de manera rápida. Las operaciones de búsqueda que hacemos cotidianamente son efectuadas de manera eficiente no sólo gracias a la velocidad del ordenador, sino principalmente por lo ingenioso de los métodos utilizados tanto para ordenar la información, como para buscarla. Por el tamaño de la información que se maneja, ni el ordenador más veloz funcionaría adecuadamente, si los algoritmos utilizados fueran ineficientes. En esta actividad el estudiante se enfrentará al problema del diseño de algoritmos de ordenación, con el objetivo de comprender el concepto de complejidad de un algoritmo, y la relevancia de la misma en el funcionamiento eficiente de los sistemas computacionales. Aunque esta actividad no ofrece desafío en términos de la formulación del problema ni la sistematización, el objetivo principal es poder discutir diferentes formas de matematización que nos permita poder comparar eficiencias de distintos algoritmos.

- *Cómo mantener la temperatura de un líquido*

Se plantea una situación sencilla relativa distintas estrategias para mantener un recipiente que contiene líquido a una temperatura alta (podría ser una taza de café caliente, un termotanque, etc.). Esta situación nos permitirá complejizar el proceso de modelización, pero implica una relativamente sencilla etapa de delimitación del problema y formulación de preguntas, así como también los estudiantes tendrán a su alcance modelos matemáticos conocidos de complejidad media.

- *Extracción sustentable de bisontes*

Se plantea una situación de la semi-realidad que requiere argumentar científicamente sobre la posibilidad de permitir que en una población de bisontes se permita una extracción sustentable. Esta situación nos permitirá complejizar la etapa de formulación y sistematización, habilitando además una variedad de recursos matemático para la construcción de modelos.

- *Disparo de armas de fuego en zonas urbanas*

A partir de noticias que hacen referencia a la presencia de balas perdidas en los centros urbanos, se pretende indagar sobre las condiciones (calibre del arma, forma de lanzamiento del proyectil, etc.) que pueden determinar que una bala lanzada al aire tenga un efecto dañino para el ser humano. En esta situación se enfrentarán al proceso de modelización en toda su complejidad.

- *Estadísticas de tu institución*

Los proceso de modelización en toda su generalidad se plantea en esta situación, que propone recolectar información estadística sobre una problemática institucional, que permita procesar información para suministrar luego al equipo de gestión como aporte para la toma de decisiones. El aspecto fundamental a trabajar es el concepto de muestra, por lo que se propone definir una problemática que requiera un recolección de datos que por su complejidad requiera definir muestras y analizar su representatividad.

- *El problema del movimiento*

El problema del movimiento fue inspirador de importantes teorías matemáticas con enormes implicancias en los desarrollos tecnológicos de los últimos siglos. Entre ellas se destacan el Cálculo Infinitesimal (CI) y las Ecuaciones Diferenciales (ED). Estas teorías en su forma actual son el resultado de largos procesos de sedimentación, en donde fue fundamental el aporte de distintas vertientes de significado, que emergieron en diferentes momentos históricos: el geométrico, el variacional y el analítico. Paradójicamente, la presentación actual del CI se encuentra completamente permeada por la irrupción de lo formal en la matemática de los siglos XIX y XX, condicionando una única puerta de entrada: el desarrollo lógico-deductivo que en muchos casos “expulsa” los sentidos originales. El objetivo de esta actividad utilizar la modelización para recuperar esos sentidos desde situaciones diversas de movimiento, asistidos por Geogebra.

- *Cómo colorear mapas*

Plantea el problema de cuál es la mínima cantidad de colores que se necesita para colorear un mapa político. Este problema origina una conocida conjetura de la teoría de grafos, cuya resolución es un Teorema que provocó polémica en el ambiente científico por ciertas circunstancias atípicas vinculadas a su demostración[1]. Se espera que los estudiantes se introduzcan a los conceptos elementales de la teoría de grafos, y que comprendan la complejidad de los problemas que se plantean.

- *Animación con Geogebra*

Diversas herramientas vinculadas con las TICs permiten visualizar los sentidos dinámicos asociados a fenómenos de distinta índole, en particular fenómenos físicos. Mediante su uso, es posible encontrar vías de acceso alternativas a los pesados desarrollos algebraicos, de manera que, cuando se llega a los mismos, las ecuaciones pueden ser provistas de significados que complementan su validación puramente algebraica. En esta actividad se pedirá hacer y/o completar plantillas Geogebra en la que visualizan aspectos dinámicos de distintos fenómenos físicos.

ACTIVIDADES

A continuación damos la secuencia de actividades con el siguiente formato:

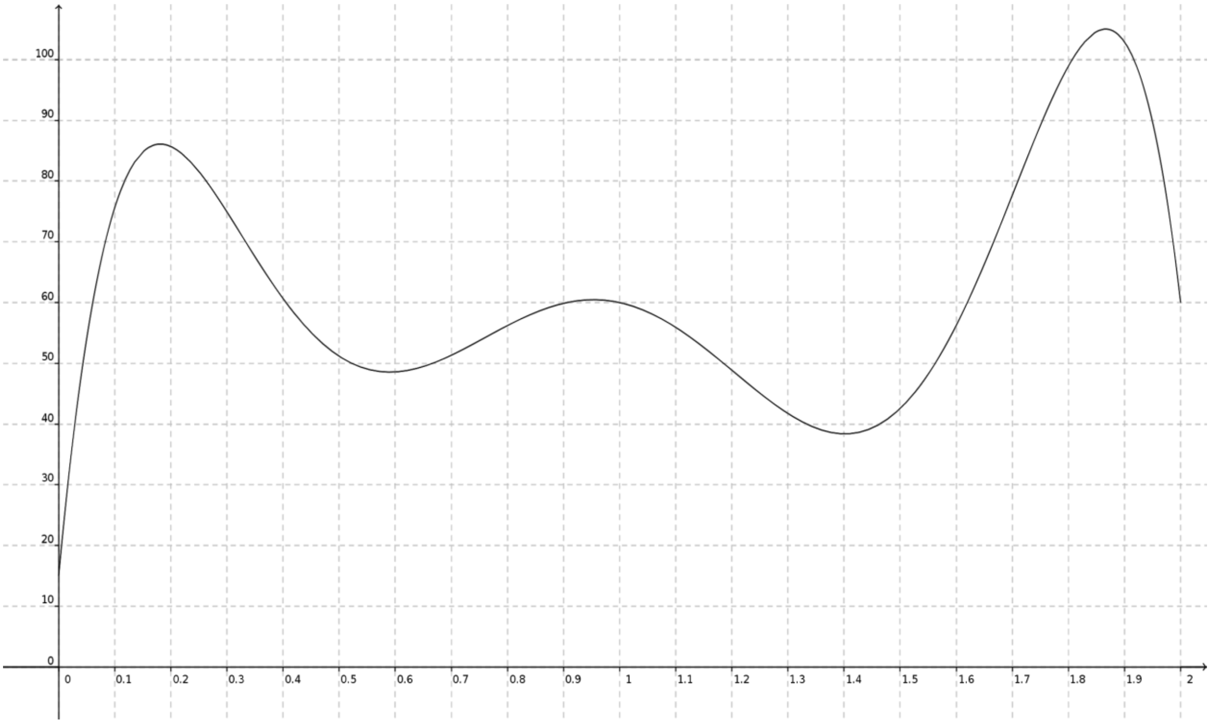
- las consignas para los estudiantes (letra azul) correspondientes a las distintas situaciones que se plantean,
- las orientaciones para el docente, donde sugerimos posibles intervenciones del mismo para guiar el desarrollo de la actividad,
- La bibliografía y páginas web sugeridas.

[1] Ver por ejemplo https://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-75396-2006-10-31.html

Un problema de distancia recorrida

La figura de abajo muestra una función que representa la velocidad (medida en km/h) de un automóvil marca VW que se mueve por una carretera en línea recta sin cambiar el sentido de circulación. La función describe la velocidad de movimiento durante el lapso de 2 horas. Otro automóvil marca Fiat se encuentra en t = 0 a una distancia de 21 km por detrás del VW. A raiz de un incidente ocurrido, se debe determinar si el segundo automóvil alcanzó en algún momento al VW. Sobre el Fiat se conocen algunos datos sobre su velocidad, dados en la tabla.

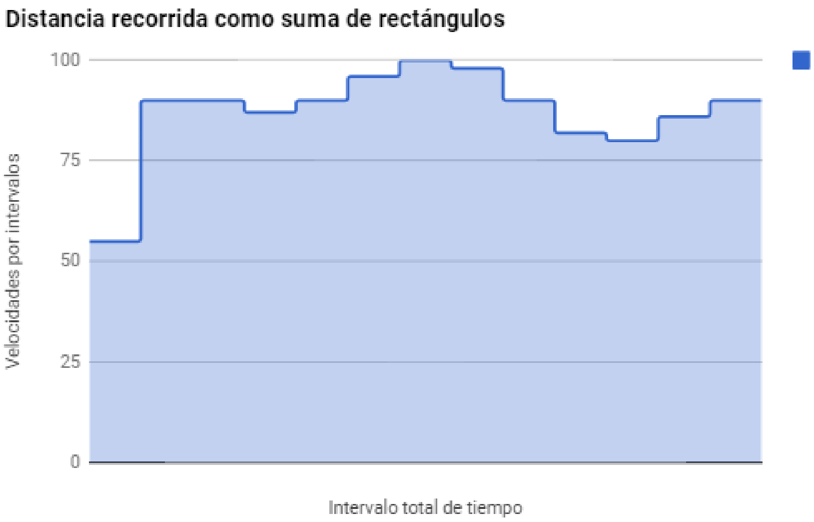
Mininutos	Velocidad
0	55
10	90
20	90
30	87
40	90
50	96
60	100
70	98
80	90
90	82
100	80
110	86
120	90



Orientaciones para el docente

Es importante que el docente otorgue el tiempo necesario para que los estudiantes logren desarrollar una estrategia para poder proveer una respuesta, sin dar ninguna indicación sobre qué herramienta teórica utilizar. De esta manera se podrá recuperar lo trabajado en en Problemáticas del Análisis Matemático II dotándolo de nuevos sentidos.

Por ejemplo, algunos estudiantes podrían optar por realizar el cálculo aproximado de la distancia recorrida por el Fiat a través de la suma del área de los rectángulos, uno para cada dato de la tabla, en los que se asume que el automóvil mantuvo una velocidad constante:



Otros podrían graficar una función y calcular de manera aproximada (por ejemplo realizando un cuadriculado) el área bajo la curva.

El desarrollo de un problema similar de modelización se relata en Viola y Nieto (2017). Aunque la experiencia es desarrollada simultáneamente en último año del secundario y en el 3er año del Profesorado, se recomienda la lectura de este artículo dado que presenta un escenario similar al que se espera encontrar al presentar esta situación.

Sería bueno que los estudiantes dispongan del tiempo necesario para desarrollar una plantilla Geogebra con modelos funcionales que permitan simular la situación, si es posible representando el movimiento con las herramientas dinámicas que ofrece Geogebra. Si es necesario se pueden buscar plantillas y tutoriales on-line. Es importante que el estudiante comience a familiarizarse con esta herramienta.

El problema de ordenar

<u>Introducción</u> (Puede ser oral o material de lectura)

Cotidianamente nos enfrentamos a la operación de solicitar a algún dispositivo electrónico (celular, notebook, computadora, etc.) que efectúe una búsqueda que involucra procesar grandes cantidades de datos. La velocidad de respuesta de los mismo radica principalmente en el uso de métodos eficientes, que tienen como requisito fundamental de que los datos estén adecuadamente ordenados. Por este motivo los algoritmos de ordenación tienen una importancia fundamental para lograr velocidad en el procesamiento de datos de un dispositivo electrónico. Si no fuera por los progresos sustantivos que experimentó la ciencia algorítmica en las últimas décadas, de poco servirían los avances de la electrónica para dar respuesta a la creciente demanda de eficiencia de los sistemas computacionales.

Cuando hablamos de algoritmos de ordenación, nos referimos a procedimientos computacionales que, dado una lista de datos que tienen un identificador numérico (por ejemplo, los datos completos de un conjunto de personas se identifican por el número de DNI), generar otra lista en la cual los datos estén ordenados de manera creciente teniendo en cuenta el orden de los números identificatorios.

Hay muchos métodos para ordenar datos, y cuando se aplican para ordenar una cantidad pequeña de datos, no se advierte que uno sea más eficiente que otro. Pero aplicados a grandes cantidades de datos, como ocurre en los problemas computacionales reales, pueden tener diferencias abrumadoras. Puede ocurrir que aplicando un método para ordenar una cantidad N (número muy grande) de datos se tarde unos pocos segundos, mientras que aplicando otro método aparentemente similar, se tarde varios días para ordenar los mismos N datos.

¿Cómo detectar si un método es eficiente o no, sin necesidad de aplicarlo? El análisis con métodos matemáticos de un algoritmo permite revelar su verdadera eficiencia. Esto se hace en el marco de una teoría llamada complejidad computacional.

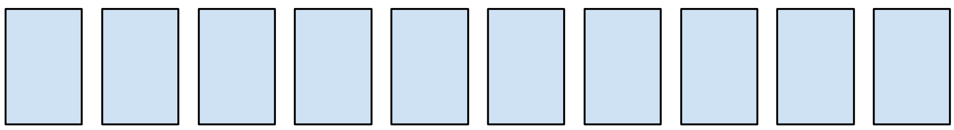
El objetivo de esta actividad es diseñar algoritmos de ordenación, y analizar matemáticamente algoritmos existentes, para lograr una aproximación al problema de la complejidad algorítmica y su relevancia en el funcionamiento eficiente de las computadoras.

Actividad introductoria para resaltar la importancia de los métodos de ordenación:

Supongan que disponen de un fichero con las historias clínicas de 1000 pacientes, y pueden visualizar el número de documento de cada ficha. ¿Cuánto tardarían en encontrar una historia clínica si el fichero está desordenado? ¿Cuánto si está ordenado?

Orientaciones: Se debe proponer fijar un tiempo (digamos 5 segundos) en leer el número de una ficha, y así estudiar las distintas situaciones para cada caso, tratando de estimar cuánto se tardaría en el peor caso de cada situación: si están desordenadas el peor caso tardaría 1000x5seg., mientras que si están ordenadas y se procede con búsqueda binaria (ver abajo) se tardaría aproximadamente 10x5seg. (ver estrategia 3 abajo, en las orientaciones para la actividad 7)

Actividad 1*:* Cada grupo recibirá 10 tarjetas, que posee cada una un número. Se debe diseñar un método para ordenarlas de menor a mayor. Cada grupo debe escribir de manera precisa el método diseñado. Un método consiste en una sucesión de "pasos básicos", los cuales de describen abajo. Se comienza disponiendo las mismas en fila, en el orden que fueron dadas, disponiendo los números hacia abajo.



En nuestro caso tenemos un único "paso básico":

PASO BÁSICO: dar vueltas las tarjetas de los lugares i y j, compararlas, y permutarlas si se considera necesario, para cualquier i, j entre 1 y 10.

Ejemplos de “pasos básicos”:

Ejemplo 1: ejecución de un paso básico **con** permutación

a) Se dan vuelta las cartas 2 y 4:

	23789		21174						

b) Se los compara y se decide permutarlos:

	21174		23789						

c) Se dan vuelta las cartas

Ejemplo 2: ejecución de un paso básico **sin** permutación

a) Se dan vuelta las cartas 2 y 4:

	21174		23789						

b) Se los compara y se decide **no** permutarlos:

	21174		23789						

c) Se dan vuelta las cartas

Actividad 2: Se intercambian los textos escritos y cada grupo debe poder reproducir el método descripto en el texto recibido. En caso de no poder hacerlo, el grupo autor del texto deberá reescribirlo.

Actividad 3: El objetivo de esta actividad es responder la pregunta:

¿Cuánto tiempo se tardaría si quisiéramos ordenar 1000 tarjetas con el método diseñado?

Se puede asignar un tiempo (por ejemplo 5 segundos) a la ejecución de un paso básico. Luego entonces se debe contar la cantidad de pasos básicos que se realizarán.

Actividad 4: Se debe utilizar el simulador http://math.hws.edu/TMCM/java/xSortLab/ para:

1 Identificar el nombre del algoritmo diseñado por cada grupo

2 Entender el método de ordenamiento por intercalación (mergesort). Se debe poder explicar el método ordenando 10 tarjetas.

Actividad 5*:* Que el algoritmo diseñado sea tan lento para ordenar 1000 cartas, tiene su correlato en la escala temporal de las operaciones de un microprocesador. Aunque una operación de permutar dos lugares de memoria puede durar una fracción muy pequeña de un segundo (pongamos 1 milisegundo), un algoritmo que haga $N(N-1)/2$ operaciones básicas tardaría

$$1000 \times 999 \times 0.5 \times 0.001\ segundos\ =\ 499.5\ segundos\ >\ 8\ minutos$$

lo que es mucho tiempo pensando en la operación de una computadora. Se debe utilizar los simuladores para comparar las eficiencias de los distintos algoritmos de selección, inserción, intercalación (mergesort) y el algoritmo rápido (quicksort).

.

- http://www.sorting-algorithms.com/
- https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Algorithms.html

¿Encuentra evidencias que le permitan concluir que algunos algoritmos son *significativamente* más rápidos que otros? ¿Cómo puede explicar lo “significativo” de la diferencia?

Actividad 6: ¿Cuánto tiempo tardaría el algoritmo de intercalación en ordenar 1024 cartas? ¿Cómo justifica su estimación?

Actividad 7: Cada grupo recibirá 100 tarjetas, que posee cada una un número, y 100 tarjetas en blanco del mismo tamaño que servirá para cubrir cada una de las 100 tarjetas numeradas. Un miembro del grupo se debe retirar y no participar hasta el final de la actividad. Los restantes deberán pensar una manera de disponer las 100 tarjetas numeradas (tapadas) sobre un pupitre. Culminada la tarea, el miembro del grupo que no participó, deberá efectuar la búsqueda de cinco tarjetas cuyos números serán dados por el docente, con la consigna de

destapar la menor cantidad de tarjetas posibles. Por supuesto, el grupo que logre cumplir la tarea destapando la menor cantidad de tarjetas será el ganador.
Para efectuar esta búsqueda, el miembro del grupo que no participó en el ordenamiento recibirá un “instructivo” de a lo sumo 2 renglones, en donde los restantes miembros transmitirán la información que consideren relevante para hacer más eficiente la búsqueda. Si es hecho de manera adecuada, esto debería facilitar la búsqueda, evitando una lectura innecesaria de tarjetas.

Nota: La disposición inteligente de las tarjetas, y el registro de la adecuada cantidad de información para pasarle al “buscador” es la clave para poder cumplir el objetivo de la manera más eficiente. Por ejemplo, existe una manera de disponer las tarjetas y efectuar la búsqueda de manera que CUALQUIERA de las 100 tarjetas sea encontrada con menos de 7 “destapadas”.

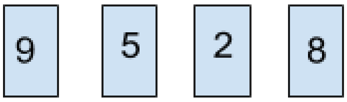
Orientaciones para el docente

Actividad 1:
Es probable que los estudiantes no atiendan a la restricción de poder ejecutar sólo pasos básicos. Por ejemplo, pueden intentar dar vuelta las tarjetas y efectuar permutaciones aprovechando la visión panorámica de todas las tarjetas. Se debe insistir con esta restricción, en tanto se pretende imitar las limitaciones que posee un microprocesador.

Actividad 2:
Se sugiere emplear el tiempo suficiente para la escritura del algoritmo, poniendo énfasis en que la descripción debe ser comprensible, y carecer de ambiguedad, esto es, un ejecutor debe poder deducir de manera unívoca cuál será el próximo paso (determinismo). Ejemplificamos ahora con un método y una posible forma de escritura.

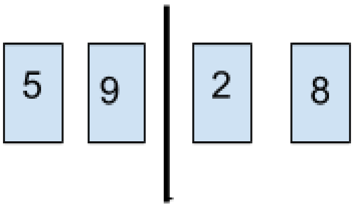
El método consiste en:
1) Procurar ordenar los primeros dos lugares, haciendo si es necesario una permutación
2) Procurar que queden ordenados los primeros 3 lugares. Para esto se "inserta" la tarjeta que está en el lugar 3 en el lugar que le corresponde (1, 2 o 3), haciendo permutaciones.
3) Procurar que queden ordenados los primeros 4 lugares. Para esto se "inserta" la tarjeta que está en el lugar 4 en el lugar que le corresponde (1, 2, 3 o 4), haciendo permutaciones.
Así se continúa hasta el paso 9, en donde quedan todas ordenadas.

Visualización del método con un ejemplo:



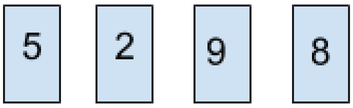
Estado inicial

permutación(1,2)

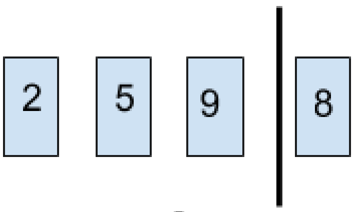


Cumplido el paso 1: los primeros 2 lugares están ordenados

permutación(2,3)

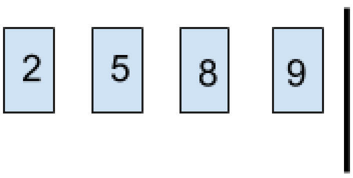


permutación(1,2)



Cumplido e l paso 2: los primeros 3 lugares están ordenados

permutación(3,4)



Cumplido el paso 3: los primeros 4 lugares están ordenados

<u>Algoritmo (en notación de programa):</u>

Desde i = 2 hasta N hacer:
{*se asume que el intervalo [1,i-1] está ordenado*}
    Ordenar el intervalo [1,i] insertando mediante
    Permutaciones el lugar i en el lugar que le corresponde
    Según el orden

Para los fanáticos de la notación de programas, se pueda dar una vuelta de tuerca más, quedando lo que se denomina en algoritmia una programa en pseudocódigo:

Desde i = 2 hasta N hacer:
{*se asume que el intervalo [1,i-1] está ordenado*}
    Desde j = i hasta 2 hacer:
        Si Lugar[j-1]>Lugar[j] entonces Permutar[j-1,j]

Actividad 3:
Es probable que intenten aplicar regla de tres simple utilizando como dato la cantidad de tiempo que tardan en ordenar 10 cartas. En tal caso se sugiere pedirles que ordenen 16 cartas para comprobar si la predicción hecha es correcta.
El planteo de un algoritmo con suficiente grado de abstracción permite un análisis de la cantidad de operaciones básicas que se realizan al ordenar una cantidad arbitraria, digamos N, de tarjetas. Por ejemplo, si definimos como operación básica el *comparar dos tarjetas*, y le asignamos 1 segundo de demora al hecho de efectuar una comparación, entonces podemos efectuar el siguiente análisis sobre el algoritmo dado:

Primer iteración (i = 2): realiza 1 comparación (Lugar[1] >Lugar[2])
Segunda iteración (i = 3): realiza 2 comparaciones (Lugar[2] >Lugar[3] y Lugar[1] >Lugar[2])
…
(N-1)-ésima iteración (i=N): realiza N-1 comparaciones.

Luego la cantidad total de operaciones básicas será:

$$1 + 2 + 3 + ... + (N - 1) \ = \frac{N(N-1)}{2}$$

Luego para ordenar 1000 tarjetas tardaríamos 499500 pasos básicos, o sea, se tardaría varios días.

Para concluir la actividad de ordenación se sugiere pedir la escritura de una monografía breve.

Lineamientos para la confección de una monografía breve sobre el tema **Algoritmos de Ordenación**. Los siguientes interrogantes permiten estructurar la misma, y no constituyen un cuestionario a responder.

- ¿Por qué es importante plantearse el tema de diseñar algoritmos de ordenación, cuando en realidad el ordenar es un procedimiento natural que todo ser humano sabe hacer?
- ¿Cómo funciona el algoritmo que diseñaron? ¿Tiene nombre el mismo, o responde a la misma idea de alguno que tiene nombre?
- ¿Cuántos pasos básicos realiza el algoritmo para ordenar N cartas? ¿Cómo justifica matemáticamente esa afirmación?
- ¿Hay algoritmos que sean significativamente más rápidos?
    - ¿Cómo justifica la afirmación? (que son significativamente más rápidos)
    - ¿Cómo pondría de manera creativa en evidencia la diferencia de rendimiento para que se visualice la importancia de contar con algoritmos más sofisticados que los diseñados inicialmente? Alternativas: gráficos, experiencias con el simulador, tablas, analogías...

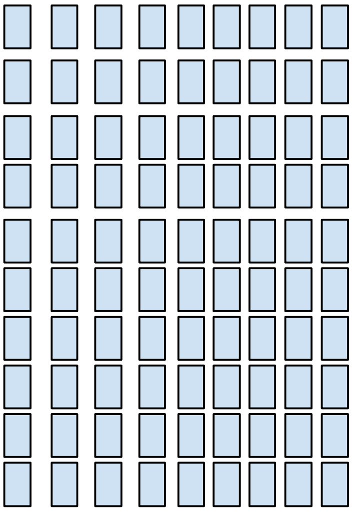
Actividad 7:

Para orientación del docente, mostramos algunas estrategias posibles que podrían aparecer.

- Estrategia 1 (la no-estrategia): las 100 tarjetas tapadas dispuestas al azar sin ningún orden, y no se transmite ninguna información en el mensaje. Cada búsqueda requiere en el peor caso 100 destapadas.

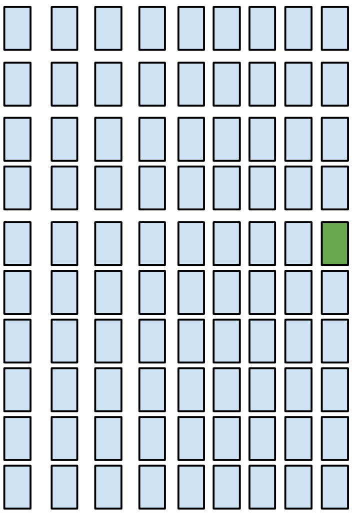
- Estrategia 2: las 100 tarjetas dispuestas de manera ordenada, y se transmite en el mensaje que las tarjetas están ordenadas, y se suministra además información sobre la posición de alguna de ellas. Por ejemplo:

"*Filas ordenadas. Los 1eros de cada fila son: fila 1: 23056. f2: 560220, f3: 67280, f4: 980770, f5: 1210621, f6: 2340650, f7: 3456231, f8: 5601120, f9: 6000621, f10: 56098770,* "

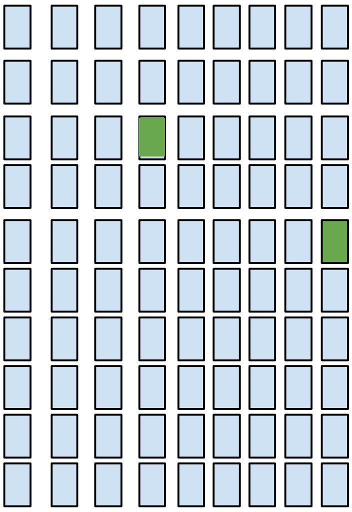


Para este esquema, en el peor caso habría que destapar 9 tarjetas para efectuar la búsqueda de un número.

- Estrategia 3: esta posibilidad no se diferencia en el orden sino en la estrategia de búsqueda. Se informa que las tarjetas están ordenadas, y al buscador se le ocurre efectuar la búsqueda de la siguiente manera. Primero se fija en la "tarjeta del medio", si el número de la misma es mayor al buscado, sabrá que se encuentra entre las primeras 49 tarjetas, y si es menor, entonces la buscada se encontrará entre las 50 últimas.



Suponiendo el primer caso, vuelve a fijarse en "la del medio", y de la misma manera deduce si está antes o después.



Con esta estrategia el peor caso sería $log_2 100$, o sea, en menos de 7 "destapadas" se encuentra cada tarjeta. Este método se denomina búsqueda binaria.

Bibliografía y webgrafía sugerida

Biggs, Norman L.(1994) *Matemática discreta*. Barcelona: Vicens-Vives.

Wikipedia, *Algoritmo de ordenamiento*,
https://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_ordenamiento

Simuladores de algoritmos de ordenación:

- http://math.hws.edu/TMCM/java/xSortLab/
- http://www.sorting-algorithms.com/
- https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Algorithms.html

Extracción sustentable de bisontes

En un territorio determinado de una jurisdicción se detecta una población de bisontes formada por una cantidad indeterminada de machos y 30 hembras. Hay un proyecto en la legislatura de la jurisdicción para habilitar la extracción sustentable de bisontes de ese territorio. El único espacio de resistencia a la medida es que queda por establecer:

- El año a partir del cual se habilitará la extracción, de manera de garantizar una población mínima de 80 hembras.
- La tasa de extracción de hembras, para garantizar que en el largo plazo no se extinga la población.
- Sugerencias sobre la posibilidad de regular sobre la prohibición de la extracción de hembras de determinadas edades.

Ustedes forman parte del equipo de técnicos que asesorará a la legislatura sobre estos puntos. Disponen de los datos siguientes:

- Las bisontes están distribuidas por edad en tres etapas: becerras (5), terneras (5) y adultas (20).
- Cada año nace un promedio de 40 becerras por cada 100 adultas.
- Solamente los adultos producen crías.
- Cada año sobrevive, aproximadamente, el 60% de becerras, un 75% de terneras, y el 95% de las adultas.
- Las posibilidades de crecimiento que ofrece el territorio son, desde el punto de vista práctico, ilimitadas.

Orientaciones para el docente

En la primera etapa del desarrollo se los guiará para que pueda proyectar de un año para otro el crecimiento de la población de hembras. Por ejemplo, podemos proyectar el crecimiento en un año a partir del inicio haciendo:

Año 0 : $p(0) = 5 + 5 + 20 = 30$

Año 1: $p(1) = 0.4 * 20 + 0.6 * 5 + 0.75 * 5 + 0.95 * 5 = 33.75$

Se presentará la necesidad de disponer adecuadamente la información, ya que es necesario disponer en todo momento de la cantidad de becerras, terneras y adultas. Se sugiere alentar que experimenten diversas formas de sistematización, aceptando formulaciones y/o soluciones provisorias o aproximadas.

La matematización que puede resultar más adecuada es utilizar un vector:

Año 0 : $P_0 = (5{,}5{,}20) \quad p(0) = 30$

Año 1: $P_1 = (0.4 * 20, 0.6 * 5, 0.75 * 5 + 0.95 * 5) \quad p(1) = 33.75$

Luego se puede inducir a verificar que el producto de matrices es el dispositivo adecuado para "pasar" de un año a otro: si M es la matriz con filas (0,0,0.4), (0.6,0,0) y (0,0.75,0.95), entonces

$$M\,P_k = P_{k+1}$$

Se sugiere alentar al uso de GeoGebra o de planillas de cálculo para las etapas de sistematización y matematización.
Si Q es un vector que describe la distribución de población en el año k, y se satisface que la suma total de hembras es al menos 80, entonces la tasa de extracción λ puede caracterizarse mediante la ecuación

$$MQ - \lambda(MQ) = Q$$

Esta ecuación expresa que puede haber una extracción de $\lambda(MQ)$ hembras garantizando que no disminuya la cantidad respecto del año anterior. Una posible formulación del problema es encontrar un k tal que sucesión

$$P_0, \ldots, P_k, \qquad MP_k - \lambda(MP_k),\ \ MP_{k+1} - \lambda(MP_{k+1}), \qquad \ldots$$

Logre conserva la cantidad de hembras por encima de 80.

¿Cómo mantener la temperatura de un líquido?

Suponga que tiene la misión de mantener alta la temperatura de un recipiente con líquido una cantidad de tiempo prolongada. Dispone de una fuente de calor para aplicar al recipiente. Diversas estrategias pueden diseñarse para lograr el objetivo, pero todas tendrán en común un aspecto: se aplica la fuente de calor cada determinado tiempo, permitiendo mientras tanto que la temperatura del recipiente descienda un determinado rango. Dependiendo de qué manera se alternen los

intervalos de sometimiento a la fuente de calor y enfriamiento, se podrá lograr mejor (o peor) el objetivo de mantener caliente el líquido, pero esa estrategia tendrá asociada un costo energético.

¿Existe una estrategia más eficiente?

Algunas preguntas como guía para el proceso:

¿Qué variables considera relevantes?

¿Puede formular una hipótesis desde datos empíricos?
¿Qué generalidad tiene la hipótesis?
O sea, ¿para otros valores de las variables seguirían sosteniendo la hipótesis?
¿Corrobora el modelo matemático la hipótesis?
¿Permite el modelo matemático algún tipo de generalización?
¿Encuentra algún tipo de validación de la misma?

Orientaciones para el docente

Se puede alentar que en una primera etapa realicen pruebas empíricas para poder formular una hipótesis. Luego, hay suficiente información vía web de modelos de enfriamiento, en particular el de Newton.

Insistir en la elaboración de un informe un informe que contenga las etapas principales del proceso, entre las cuales destacamos:

- Selección de variables relevantes y formulación de preguntas concretas que se van a abordar, cuyas respuestas aportan a la comprensión de la situación. Experiencias que eventualmente se desarrollen para obtener primeras aproximaciones a las respuestas.
- Formulación de una o varias hipótesis.
- Sistematización y generación del modelo, ¿hay modelos conocidos para el fenómeno de enfriamiento?, ¿qué hipótesis harán sobre cómo calienta la fuente (fuego, microondas, etc.)?, etc.

- Interpretación de los resultados en relación al problema original y validación. ¿Las argumentaciones matemáticas tienen sentido en relación a lo que se observa? ¿Son significativas las conclusiones o sólo refieren a aspectos teóricos?
- ¿Permite el modelo pensar en generalizaciones de las hipótesis presentadas?

Disparo de armas de fuego en zonas urbanas

Los fragmentos de noticias que se muestran a continuación hacen referencia a situaciones de disparos de armas de fuego en zonas urbanas.

> **Una bala perdida mató a un niño en su cama** https://www.el-carabobeno.com/una-bala-perdida-mato-nino-cama/
> *En su casa, de madrugada y durmiendo al lado de su madre encontró la muerte un niño de nueve años. Una bala perdida cayó sobre su cabeza y lo mató. Santiago Medina vivía en las invasiones de Alí Primera del municipio Los Guayos.*
> *La madrugada de este sábado unas bandas se enfrentaron a tiros durante cierto tiempo. Uno de los pistoleros disparó el proyectil que cayó sobre el techo del rancho donde dormía el menor con su madre*.
>
> **Villa del parque: un vecino mata palomas con un rifle de aire comprimido**
> https://www.lanacion.com.ar/1825934-villa-del-parque-un-vecino-mata-palomas-con-un-rifle-de-aire-comprimido
> *En Villa del Parque, en la esquina de San Nicolás y Tinogasta, un vecino se puso a matar palomas con un rifle de aire comprimido. Luego tiró los cuerpos en un contenedor de la zona.*
> *Al parecer, el hombre estaba molesto porque las aves construían nidos en el techo de su casa. Uno de los vecinos le sacó fotos e hizo la denuncia en las redes sociales.*

¿Cuáles son las condiciones que determinan que una bala perdida pueda ser dañina para un ser humano?

Orientaciones para el docente

Se propone establecer distintas instancias de trabajo. A diferencia de la situación anterior, esta situación merecerá bastante discusión a la hora de delimitar el problema y establecer las variables a considerar. Evidentemente hay variables significativas que posiblemente no puedan ser tenidas en cuenta por la complejidad que implica.

Primera etapa: Búsqueda de información. Lectura de notas relativas a sucesos como los citados en el enunciado, y búsqueda de información sobre las respuestas que pueden ofrecer páginas especializadas de internet o la consulta con especialistas. Por ejemplo, en

http://www.microsiervos.com/archivo/mundoreal/balas-al-aire.html

De esta manera definir de manera más precisa cuáles son las preguntas a las que se pretende investigar una respuesta.

Segunda etapa: Delimitación de las variables a considerar, de manera de poder redefinir las preguntas en función de la relación entre esas variables. De esta manera se podrá desarrollar el resto del proceso de modelización.

Algunas páginas web que pueden ser útiles

http://introduccionalabalistica.blogspot.com.ar/2010/10/heridas-por-arma-de-fuego.html
http://www.eluniversal.com.mx/articulo/metropoli/edomex/2016/11/15/la-9-mm-el-arma-preferida-de-policias-ladrones-y-justicieros
http://www.microsiervos.com/archivo/mundoreal/balas-al-aire.html
http://www.bbc.com/mundo/noticias/2011/08/110817_peligro_disparar_aire_cr
http://historiadelasarmasdefuego.blogspot.com.ar/2011/02/por-que-no-se-debe-realizar-disparos-al.html
http://weekend.perfil.com/2016-06-20-291-completo-analisis-de-rifles-de-aire-comprimido/
https://es.wikipedia.org/wiki/Bal%C3%ADn
https://www.rionegro.com.ar/bariloche/el-aire-comprimido-es-de-venta-libre-pero-tiene-la-potencia-de-un-arma-JM3358568
https://ar.answers.yahoo.com/question/index?qid=20130405095831AAcbBaZ
http://kilermt.com/bala-distapara-hacia-arriba-90o-a-que-velocidad-cae/
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/stokes2/stokes2.htm

Estadísticas para tu institución

Muchas decisiones tomadas por el equipo de gestión de una institución implican definir aspectos del funcionamiento interno que intentan compatibilizar intereses y necesidades de distintos actores. Estos son en general materia de tensión dentro de una institución, y la información que puede ser relevante para una adecuada toma de decisiones en general no es fácil de recolectar, es a veces contradictoria y de una difícil interpretación.

Ejemplo de temas:

Horario de cursado

Un problema siempre vigente en las instituciones de nivel superior es la existencia de alumnos que llegan tarde a la primer hora por superposición de horarios laborales con los de cursado. Por otro lado, también existen aquellos que, debido a los horarios del transporte, se retiran antes de la finalización de la última hora. ¿Es adecuado el horario actual? Motorizar un cambio, adelantando o retrasando el ingreso/salida, ¿mejoraría la situación?

Situaciones para revelar la complejidad del problema:

- Hay alumnos que pueden no tener conflicto actualmente porque decidieron no cursar algunas materias justamente por superposición de horarios laborales con el cursado, o por dificultades con los horarios de transporte.
- Hay alumnos que pueden no tener conflicto actualmente por acuerdos particulares con el docente que contempla la situación, o con el lugar en donde trabajan, que les permite flexibilidad.
- Hay otras cuestiones a tener en cuenta para analizar, que no tengan que ver con trabajo o transporte, y que motiven a que para algunos alumnos un cambio sería conveniente? (Alguien quiere por ejemplo dormir más horas de siesta.)

Régimen de cursado

En los últimos años desde la Dirección General de Educación Superior se promovieron diversos cambios en las reglamentaciones que imponen las condiciones a cumplir a la hora de ser habilitado para una determinada instancia en el proceso de acreditación de una unidad curricular (por ejemplo, para el cursado, la promoción, posibilidad de rendir en turno regular, etc.) ¿Presentan inconvenientes o beneficios estos cambios desde el punto de vista de los distintos actores institucionales? ¿Se puede comprobar una incidencia real de estos cambios?

Trayectorias previas

Una característica de la institución es la de ser receptiva de estudiantes con trayectos previos en educación superiores. Es significativa esta característica respecto del total de estudiantes? ¿Puede identificarse alguna relación entre esa particularidad y la trayectoria dentro de la misma institución?

Se debe plantear una situación institucional, y desarrollar un proceso de modelización que permita elaborar información que sea relevante para la toma de decisiones en relación a esa situación. El proceso de modelización debe implicar la recolección de datos estadísticos a partir de una muestra representativa.

Se recomienda la lectura de:

KELMANSKY, D. (2009) Estadística para todos. Colección Las Ciencias Naturales y la Matemática. Ministerio de Educación. Ciudad Autónoma de Buenos Aires. http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL001858.pdf

---

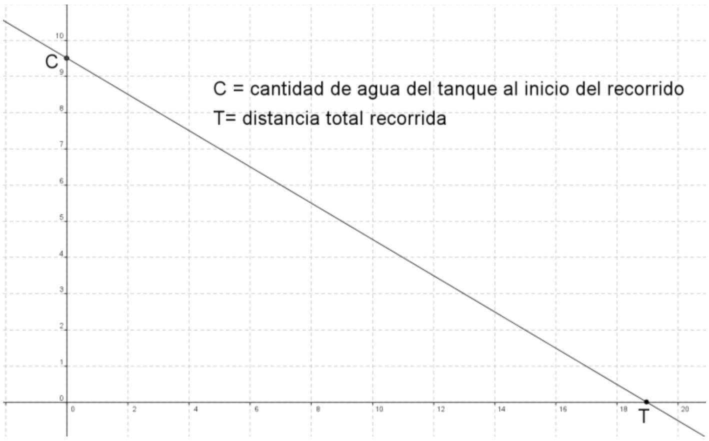
El problema del movimiento

Un camión que posee un flujo constante de descarga de agua vació su contenido en un determinado trayecto. El camión fue gradualmente aumentando la velocidad, de manera que al comenzar el recorrido, descargaba por metro el doble de la cantidad de agua que descargaba al finalizar el recorrido.

Se debe desarrollar una modelo descriptivo/predictivo completo de la situación. Para comenzar, primero identificar las variables relevantes, y luego pensar en hipótesis simplificadoras para poder generar un primer modelo.

Orientaciones para el docente

Se puede sugerir pensar en una situación simplificada: movimiento a velocidad constante, poniendo valores fijos para la cantidad de agua del tanque y la distancia total recorrida. Probablemente surja en primera instancia la vinculación entre las variables "cantidad de agua del tanque" y "distancia recorrida":



Se puede sugerir utilizar Geogebra para obtener modelos generales mediante el uso de deslizadores. Insistir que el modelo desarrollado debe permitir responder toda pregunta relacionada con el movimiento, como por ejemplo:

¿Cuánta agua descargó entre el minuto t1 y el minuto t2?

¿Qué distancia había recorrido cuando le quedó ⅓ del contenido?

Pueden surgir dificultades para discriminar los roles de las magnitudes convertidas en variables (C, T, etc), y las variables de las funciones que se dan como modelos. Se muestra una producción típica. El error en la función h suele ser frecuente.

De acuerdo al modelo que planteamos de la situación simplificada (movimiento a velocidad constante), vinculamos las siguientes variables:

1) Cantidad de Agua Tanque (c) – Distancia Recorrida (d).

$$f(x) = -\frac{c}{d}x + c$$

2) Cantidad de Agua Tanque (c) – Tiempo (t)

$$g(x) = -\frac{c}{t}x + c.$$

3) Distancia Recorrida (d) – Tiempo (t).

$$h(x) = -\frac{d}{t}x + d.$$

Valores Propuestos

$d = 100\ m$
$t = 500\ s.$
$c = 1000\ l.$

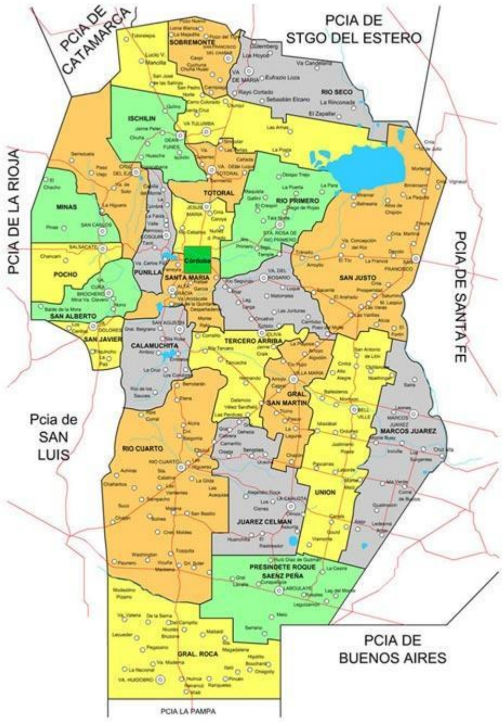
¿Cuánta agua descargó entre minuto t_1 y t_2?

$t_1 = 1 \wedge t_2 = 2$
$c_1 =$ [illegible] $\quad c_2 = 1,\ell$

Dif. 0,9. pierdo

¿Qué distancia había recorrido cuando le quedó $\frac{1}{3}$ del contenido

Cómo colorear mapas



<u>Pregunta inicial</u>:

¿Cuántos colores se necesitan para colorear un mapa político?

<u>Otras preguntas</u>:

El mapa muestra un coloreo con 4 colores de los departamentos de la provincia de Córdoba.

¿Se podrá colorear con 3 colores?

¿Cómo tiene que ser el mapa para que se pueda colorear con 3 colores?

¿ Y con dos?

¿Existirá un mapa que necesite 6 colores, y no se pueda colorear con menos?

¿Cuál es el mínimo de colores que nos permite colorear cualquier mapa?

¿Puede ese mínimo disminuirse poniendo condiciones sobre las formas? Por ejemplo, todas las regiones son rectángulos, o tienen la forma de las fichas del tetris, etc.

Orientaciones para el docente

Utilizando de manera intuitiva la idea del mapa, probablemente los estudiantes logren dar una respuesta, quizá con suficiente certeza, construida desde la familiaridad que puedan tener con el modelo tradicional de mapa político. Utilizando las preguntas sugeridas, y quizá otras que el docente estime conveniente, el estudiante deberá comprender la necesidad de una adecuada sistematización para poder abordar el problema con claridad, y tener un marco preciso para proponer soluciones y analizar la validez de las mismas. Anticipamos un camino posible de desarrollo:

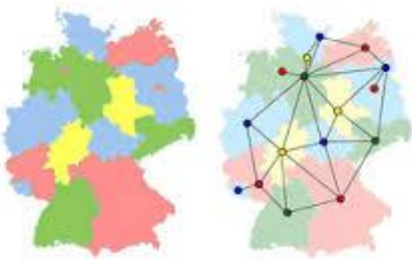
Etapa 1: Construir acuerdos para poder determinar de manera precisa qué situación obliga colorear con dos colores distintos a dos provincias.

Pregunta sugerida:

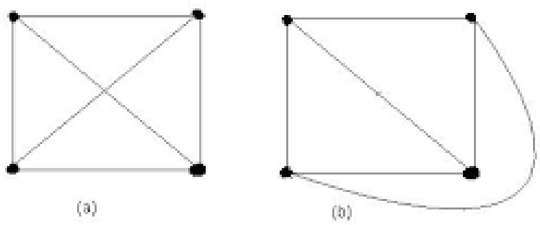
¿Que tipo de “contacto” deben tener las dos provincias para que requieran colores distintos?

Etapa 2: Es importante que puedan recorrer el camino de proponer modelos que permitan una sistematización adecuada, modelos que seguramente serán variantes del concepto de grafo. Se sugiere que se respete el tiempo necesario que permita comprender el modelo, discutir la existencia de otros alternativos, y familiarizarse con los procesos de

1. obtener el grafo asociado a una mapa,
2. poder construir un mapa que que tenga como modelo a un grafo particular.



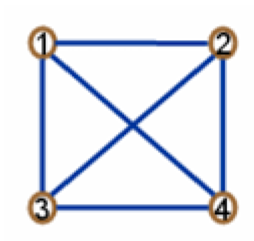
Etapa 3: Indagar sobre una propiedad fundamental: la procedencia del grafo desde un mapa fuerza el hecho de que el grafo sea planar. Se puede consultar por ejemplo el texto de Norman Biggs (2006). Los grafos planares son los que se pueden disponer de manera que las aristas no se corten. Por ejemplo, el grafo de la izquierda es planar, y a la derecha se muestra una disposición que satisface el requisito sobre las aristas.

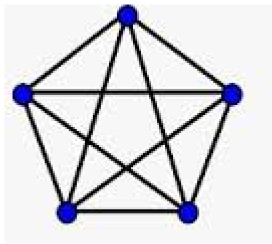


Se puede brindar un grafo planar y otro que no lo sea, para que los estudiantes determinen cuál de los dos puede provenir de un mapa.

Actividad sugerida:

Analicen la posibilidad de existencia de un mapa que sea modelizado por los siguientes grafos:





Tiempo estimado para las etapas 1, 2 y 3: entre 4 y 8 horas.

Etapa 4: Proponer el diseño de un método para colorear un grafo, y que lo apliquen al grafo asociado a la provincia de Córdoba, para verificar si obtienen un resultado “óptimo”. Se pueden buscar en la web o en la bibliografía los algoritmos conocidos, en particular el algoritmo greedy. Aquí se debe sugerir precisión a la hora de describir el método, aunque lo hagan de manera informal. Debe quedar claro que describen un algoritmo, esto implica que la persona que lo ejecuta debe poder leer paso por paso qué cosa debe ser hecha sin ninguna ambiguedad (determinismo). Proponer la búsqueda de información vía web sobre resultados matemáticos relevantes en relación a este problema, ver por ejemplo el video desarrollado por Conejero y Jordan, así como también Paenza (2006).

Tiempo estimado para la etapa 4: 4 horas.

Etapa 5: Plantear el problema general de coloreo de un grafo.

Preguntas sugeridas:
¿Habrá límites para la cantidad de colores que se necesitan para un grafo cualquiera?
¿Haý métodos para obtener estos coloreos?

Tiempo estimado para las etapas 5 y 6: 4 horas.

Bibliografía y webgrafía sugerida

Biggs, *Norman* L.(1994) *Matemática discreta*. Barcelona: Vicens-Vives.
Conejero, A; Jordán, C, *Un algoritmo voraz para el número cromático,* Universidad Politécnica de Valencia, https://www.youtube.com/watch?v=DyRh5UhtVvw. También en Algoritmo voraz para coloraciones - Teoría de Grafos https://youtu.be/R_X94Hih-dU

Paenza, A.(2006) *El problema de los cuatro colores,* diario Página 12
https://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-75396-2006-10-31.html

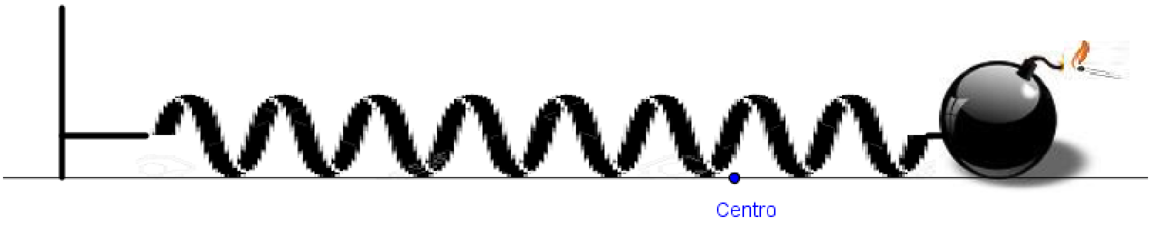
Animación con Geogebra

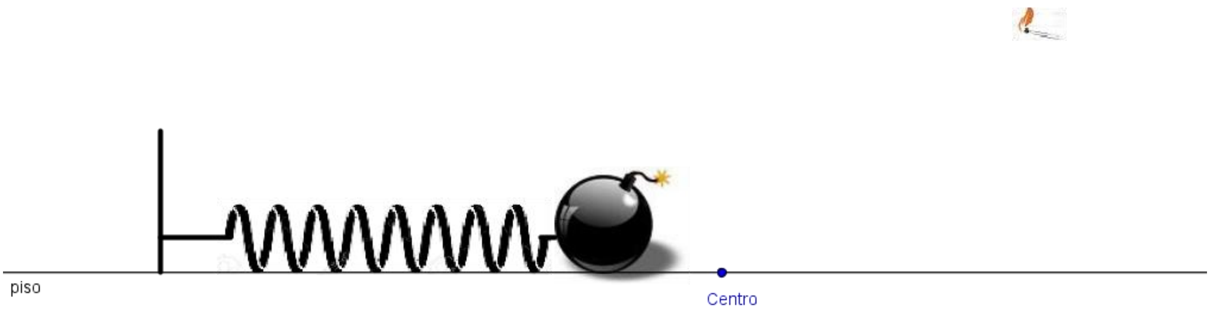
Geogebra es una herramienta flexible, con un enorme potencial para desarrollar modelos matemáticos, y que puede ser utilizada por principiantes sin mayor dificultad por tener funciones que se aplican de manera intuitiva, y constituye un ambiente propicio para la indagación y el aprendizaje por ensayo y error. En esta actividad, los estudiantes recibirán plantillas ya desarrolladas que representan un fenómeno dinámico, y tendrán que completarla agregando nuevos objetos que respeten la especificación del movimiento que se detalla. Para cumplir con lo requerido, tendrán que investigar los objetos matemáticos existentes en la plantilla, descubrir su vinculación con el movimiento de los objetos visuales, y simultáneamente familiarizarse con las funciones que provee Geogebra para estas representaciones.

Movimiento de un resorte

El movimiento de un cuerpo sujetado a un resorte entorno a un centro es un ejemplo de movimiento que puede ser descripto mediante las leyes de Newton a través de ecuaciones de relativa sencillez. En la plantilla encontrará los modelos matemáticos del movimiento que se visualiza en la vista gráfica.

Se deberá agregar un fósforo que encienda la mecha en el momento en que el resorte alcanza su máximo estiramiento. Cuando el resorte se contraiga, el fósforo se debe elevar. Las siguientes figuras muestran dos instantáneas del movimiento.





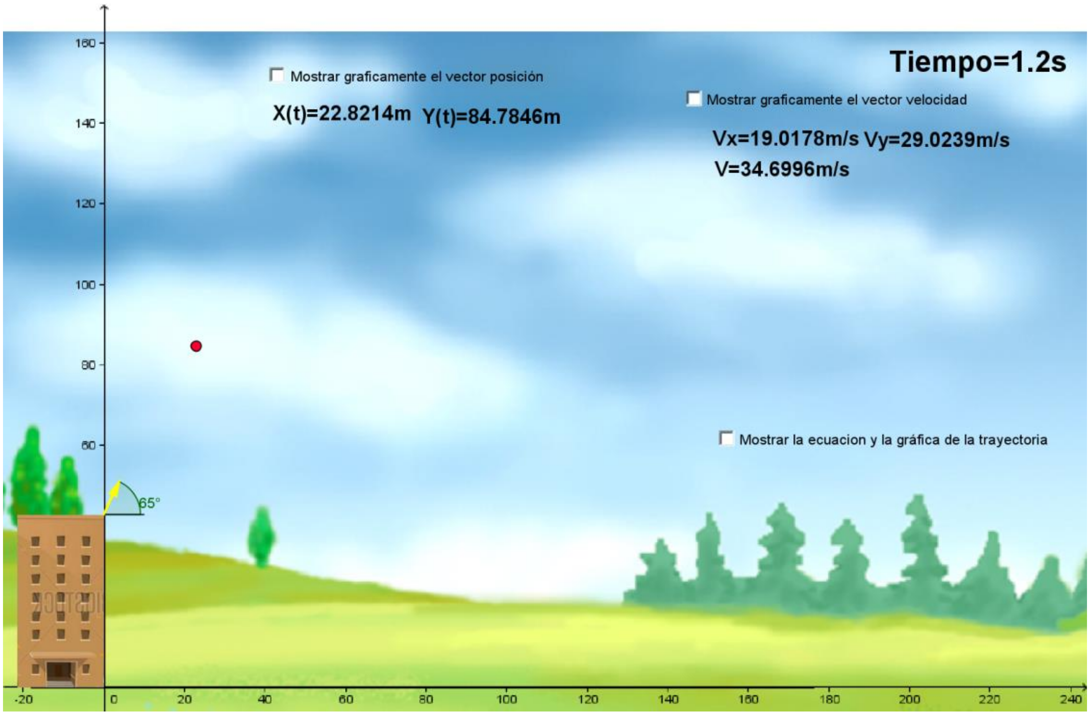
Lanzamiento de un proyectil

El lanzamiento de un proyectil es el ejemplo ineludible a la hora de introducirse a los rudimentos de la cinemática. Con él se pueden ejemplificar de manera sencilla las leyes de Newton, apelando a desarrollos algebraicos de mediana complejidad.

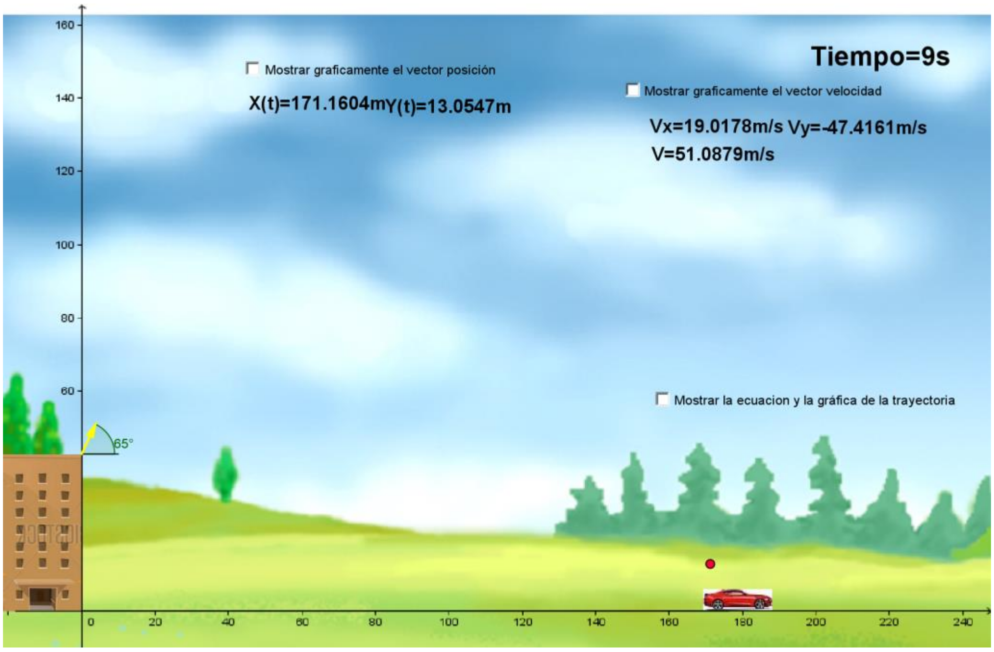
La figura muestra la vista gráfica de una plantilla Geogebra que se puede obtener desde el sitio

https://www.geogebra.org/m/MZRKudEF

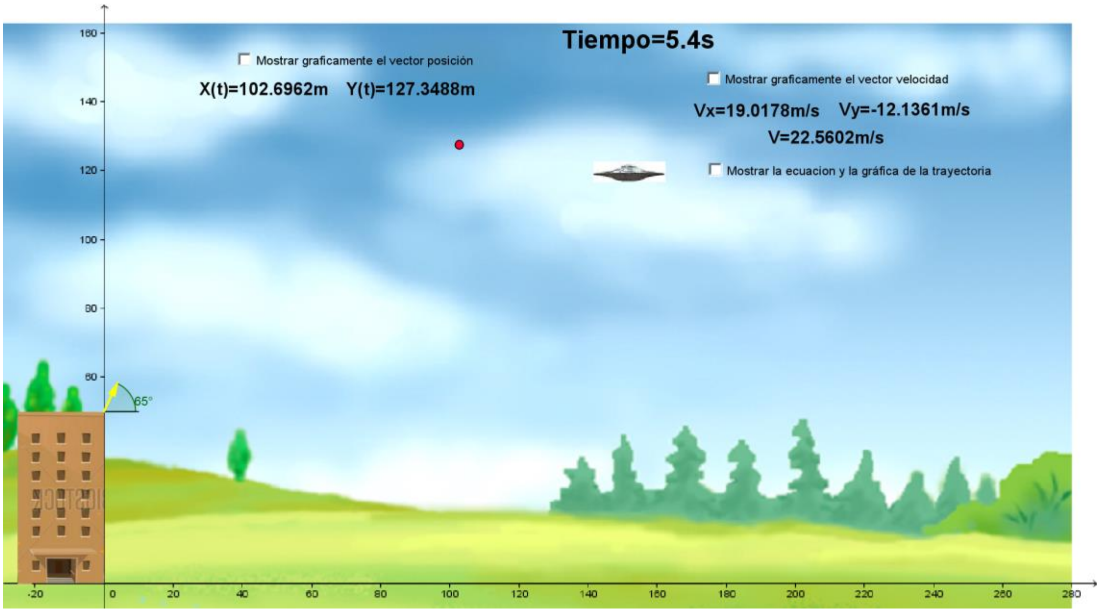
La plantilla es un simulador de un lanzamiento en el que se puede variar la velocidad inicial, la altura del edificio, y el ángulo de lanzamiento. El objetivo de esta actividad es agregar a la plantilla distintos objetos dinámicos que requieran estudiar y comprender los modelos matemáticos involucrados en el lanzamiento del proyectil.



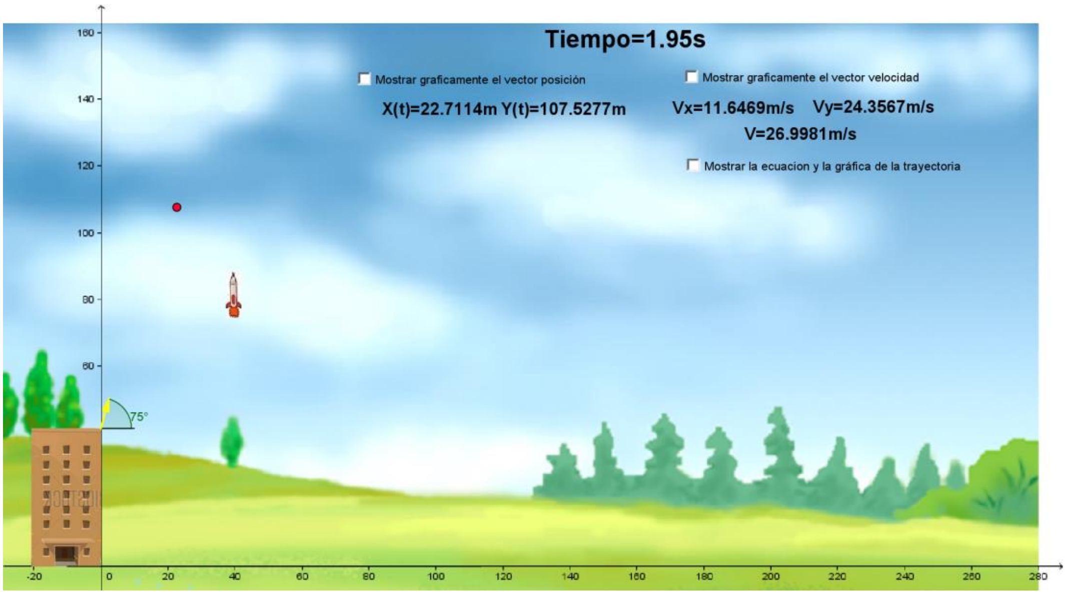
Actividad 1: Se debe agregar un automóvil que se desplaza sobre el eje de las x, que en el momento del lanzamiento se encuentra en x=0, y es impactado por el proyectil cuando el mismo toca el piso.



Actividad 2: Se debe agregar un platillo volador que se desplaza a altura constante y en sentido contrario al avance del proyectil, y que es impactado por el mismo cuando está descendiendo.



Actividad 3: Se debe agregar un proyectil que es lanzado verticalmente desde el nivel del piso a 40 metros de distancia a la izquierda del edificio (x=40), y que impacta el proyectil en su ascenso.



Orientaciones para el docente

Será conveniente separar dos aspectos del trabajo que presentan cierta complejidad. Por un lado la comprensión de las funciones programadas en Geogebra que determinan el movimiento (y su obtención a partir de las leyes del movimiento), y por otro las funciones que permiten en Geogebra introducir nuevos objetos y dotarlos de movimiento. Para lo primero se puede consultar cualquier bibliografía básica de física y/o análisis matemático. Por ejemplo, se puede consultar el texto clásico de Stewart (2008). Para lo segundo se puede recurrir a los tutoriales que provee Geogebra, seleccionando las funciones que se desean trabajar.

Bibliografía, webgrafía

Geogebra, *Tutoriales*, https://wiki.geogebra.org/es/Tutoriales

Stewart, J (2008) *Cálculo,* Sexta Edición, Cengadge Learning.

Propuestas para la evaluación

Por tratarse de evaluación en el contexto de la modelización matemática, la misma requerirá atender a una etapa inicial de diagnóstico cuando se plantea la actividad, el seguimiento del proceso (individual y grupal), y la evaluación de los resultados finales, en términos de los conocimientos sobre los cuales el estudiante puede dar cuenta. En Salett Biembengut y Hein (2004) se aborda en general las dificultades que se enfrenta un docente al proponer un proceso de modelización, y en particular, el problema de la evaluación.

Sugerimos como parte del proceso de evaluación apostar fuertemente a la producción escrita por parte de los estudiantes, y la exposición con debate, para que los estudiantes den cuenta de los procesos realizados y las dificultades encontradas.

A continuación mostramos ejemplos de instrumentos de evaluación tipo rúbrica que pueden facilitar el proceso de evaluación.

Evaluación sumativa - Instrumento: Rúbrica para Informes – Lista de chequeo para el portafolio

Grupo:		**Puntaje**
1. Realizó de manera adecuada la etapa de formalización		
1.1 Es claro el planteo del problema/hipótesis (2ptos)		
1.2 Tiene la complejidad adecuada para motivar un proceso de mod. (2ptos)		

1.3 Se realizó de manera adecuada el proceso de recolección de datos (2ptos)		
2. Realizó de manera adecuada la etapa de sistematización/abstracción		
2.1 Hay una adecuada conceptualización (2ptos)		
2.2 Tiene en cuenta evidencias/datos (2ptos)		
3. Realizó de manera adecuada la etapa de matematización		
3.1 Las herramientas matemáticas elegidas son adecuadas (2ptos)		
3.2 Son utilizadas correctamente (2tos)		
4. Realizó de manera adecuada la etapa de interpretación/validación		
4.1 Las conclusiones son pertinentes en relación a la formulación (2ptos)		
4.2 La validación es pertinente en relación a datos y otros. (2ptos)		
5. Presentación del informe (2ptos)		
	Total:	

Evaluación de proceso - Instrumento: Rúbrica para evaluar exposición oral

Nombre y Apellido del alumno:

Situación/proceso:

Categoría	5 Excelente	3-4 Bueno	2-1 En desarrollo	Puntos	Comentario
Conocimiento y preparación del tema	Demuestra solvencia y confianza, presentando información más precisa y pertinente.	Demuestra confianza, pero falla al ofrecer información precisa.	Demuestra poco conocimiento del tema y escasa información relevante.		
Expresión de un punto de vista personal	Argumenta sus ideas a partir de conocimientos válidos, pone el el énfasis en las ideas centrales	Argumenta sus ideas a partir de conoci-mientos váli-dos, aunque con ideas dis-persas.	Ofrece ideas personales sobre el tema sin establecer relación.		
Estructura y orden	Ofrece una exposición altamente organizada, respetando los tiempos establecidos.	Ofrece una exposición organizada de manera adecuada, aunque sin respetar el tiempo y dejando ideas sueltas.	Ofrece una exposición desorganizada, sin respetar el tiempo y causando confusión.		

Uso formal del lenguaje	Dominio de un registro lingüístico adecuado, un buen tono de voz, el código gestual y el contacto visual.	Tiene la intención de mantener un registro adecuado y un buen tono de voz.	Expresa sus ideas de manera poco comunicativa, así como un registro informal y un tono de voz inadecuado.		

Evaluación de proceso - Instrumento: Rúbrica – Escala de apreciación de tipo numérica

Nombre y Apellido del alumno:

Situación/proceso:

Porcentaje de asistencia a los encuentros de esta situación/proceso:

	SIEMPRE (2pt)	**A VECES (1pt)**	**NUNCA (0pt)**
Participa del trabajo en grupo.			
Realiza aportes pertinentes a l a temática.			
Puede argumentar ideas y reflexionar sobre lo trabajado.			
Respeta la opinión de sus compañeros.			
Emplea los recursos tecnológicos.			

- Propuesta de continuidad de la unidad curricular -

La actividad de animación con Geogebra puede retomarse para profundizar el eje:

Modelos continuos aplicados a la ciencia Estudio de problemáticas científicas representables con modelos continuos. Representación del modelo matemático y resolución del problema matemático asociado. Implicancia de la solución del problema matemático en el problema científico original. Ejemplo: aplicación de ecuaciones diferenciales.

Se puede proponer abordar las ecuaciones diferenciales de las cuales derivan los modelos matemáticos que representan la variación del fenómeno, y proponer que utilicen Geogebra para verificar que los mismos satisfacen tales ecuaciones, apelando a diversas herramientas que provee el software, no sólo las algebraicas (cálculo de derivadas), sino preferentemente las geométricas, como por ejemplo el cálculo de la recta tangente, que permiten abordar el aspecto geométrico de tales modelos.

Bibliografía y webgrafía completa

BIGGS, N. (1994) *Matemática discreta*. Barcelona: Vicens-Vives.

BASSANEZI, R; BIEMBENGUT, M.S. (1997) Modelación matemática: una antigua forma de investigación – un nuevo método de enseñanza. Revista didáctica de las matemáticas N° 32, pp. 13-25.

BLOMHØJ, M (2004) *Modelización Matemática - Una Teoría para la práctica*. Traducción autorizada por el autor del artículo: BLOMHØJ, M. (2004) Mathematical modelling - A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159.

CONEJERO, A; JORDÁN, C, *Un algoritmo voraz para el número cromático,* Universidad Politécnica de Valencia, https://www.youtube.com/watch?v=DyRh5UhtVvw. También en Algoritmo voraz para coloraciones - Teoría de Grafos https://youtu.be/R_X94Hih-dU

GARCÍA, E; LÓPEZ. A, ORTEGA, J, (2005) *Una introducción a la CRIPTOGRAFÍA,* http://www.criptored.upm.es/guiateoria/gt_m182a.htm

GEOGEBRA, *Tutoriales*, https://wiki.geogebra.org/es/Tutoriales

KELMANSKY, D. (2009) Estadística para todos. Colección Las Ciencias Naturales y la Matemática. Ministerio de Educación. Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

PLANETCALC. Calculadora en línea. http://es.planetcalc.com/1421/?language_select=es
RENDÓN, J. *Criptografía. Principios matemáticos.*
http://es.slideshare.net/jmacostarendon/criptografia-principios-matemticos
SALETT BIEMBENGUT, M. , HEIN, N. (2004) *Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática*. Educación Matemática, vol. 16, núm. 2, agosto, 2004, pp. 105-125 Grupo Santillana México
STEWART, J (2008) *Cálculo,* Sexta Edición, Secciones 10.3 y 10.4, Cengadge Learning.
PAENZA, A.(2006) *El problema de los cuatro colores,* diario Página 12
https://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-75396-2006-10-31.html
VIOLA, F., NIETO, E (2017) *Estudiando el cambio: Una propuesta para la introducción del concepto de integral en el nivel secundario*. Comunicación REPEM.

---

[i] **Equipo de trabajo:**

Viviana Audisio – Pamela Chirino – Nicolás Gerez Cuevas – Héctor Gramaglia – Natalia Heredia – Fernanda Viola.

Contacto: vgaudisio@gmail.com