MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DOCENTE

Articulación DGES - FAMAF[i]

Unidad Curricular: PROBLEMÁTICAS DEL ÁLGEBRA I

Objetivo general de la propuesta

Proponer un conjunto de actividades que permitan un primer abordaje de los ejes de contenidos propuestos por el Diseño Curricular para Problemáticas del Álgebra I, que ponga el foco en los conceptos y prácticas centrales de cada eje, y promueva una participación activa de los estudiantes.

Fundamentación

Las consideraciones acerca del campo de la formación específica del Diseño Curricular nos hablan de un modo particular de lectura de los ejes de contenidos que se proponen en cada unidad curricular: ya no se trata de una lectura lineal de suma de temas. Para los docentes que fuimos formados en matemática superior de una manera tradicional, elaborar una alternativa a la lectura secuencial, que atribuye a cada palabra del eje un conjunto determinado de conceptos y resultados que se van concatenando respetando un orden estrictamente deductivo, es una tarea ardua que nos lleva a un terreno en donde las seguridades construidas por años de experiencia quedan en suspenso.
Asumir una posición crítica frente al saber matemático, dando cuenta de su origen y sentido [1], no puede de ninguna manera ser reducido a la vigilancia de un estricto orden lógico-deductivo dado por definiciones y teoremas. Dar cuenta del origen y sentido requiere proponer tareas que poco tienen que ver con ese orden, el cual generalmente fue instalado

[1] Fundamentación de la incorporación de la palabra "problemáticas", que leemos en las consideraciones acerca del campo de la formación específica.

en la comunidad matemática muchos siglos después del momento de origen de las ideas centrales. Aún cuando pongamos como objeto de estudio a la demostración matemática, apelando a la misma como herramienta imprescindible cuando nos movemos por terrenos de alto grado de abstracción (aunque no sea el caso de Problemáticas del Álgebra I), pretender que el estudiante construya el sentido de ese objeto de estudio por su sola exposición secuencial es una falacia. Una demostración es un objeto matemático complejo[2], que poco tiene de secuencial, y su auténtico estudio requiere de estrategias adecuadas, tanto para abordarlo como para evaluarlo (el mero "recitado" de la demostración no es una evidencia confiable de aprendizaje ni de comprensión).
Esta propuesta intenta plasmar un conjunto de tareas pensadas para Problemáticas del Álgebra I que, en sintonía con el espíritu del diseño, promueva "*el abordaje de saberes sustantivos para ser enseñados, vinculados con conceptos, procedimientos y prácticas centrales de las disciplinas de referencia*", y que permita abordar una matemática de nivel superior, sin perder de vista que estamos formando docentes para el nivel secundario.

Descripción general y su inscripción en el Diseño Curricular

Para comprender el sentido de la propuesta, puede ser útil revisar brevemente algunos aspectos señalados en el diseño curricular.

Consideraciones acerca del Campo de la Formación Específica

- *Este campo formativo está orientado a conocer y comprender las particularidades de la enseñanza de la Matemática en el Nivel Secundario, así como sus finalidades y propósitos en el marco de la estructura del Sistema Educativo y de la sociedad en general.*

[2] El sistema formal en el cual se basan la demostraciones que se desarrollan usualmente en el pizarrón es de hecho un sistema que oculta aspectos fundamentales de las demostraciones, como por ejemplo la dependencia local de una sentencia con una hipótesis temporaria, o los aspectos no constructivos de una demostración. Este sistema es obra de Hilbert y Frege (comunmente llamado Sistema de Hilbert), y se caracteriza por apelar a muchos axiomas y pocas reglas de inferencia. Otros sistemas alternativos se han desarrollado en SXX, como por ejemplo la deducción natural de Gentzen-Prawitz, pero estos no han trascendido el ambiente de los expertos en lógica.

- *Los contenidos propuestos promueven el abordaje de saberes sustantivos para ser enseñados, vinculados con conceptos, procedimientos y prácticas centrales de las disciplinas de referencia; saberes relativos a las condiciones generales de su enseñanza y de su apropiación por los diversos sujetos de la educación y saberes orientados a la especificidad y complejidad de los contextos donde se aprende.*
- *Las unidades curriculares en las que se aborda la estructura formal de la Matemática priorizan una perspectiva vinculada con los procesos de problematización y modelización. "Problematizar" y "modelizar" son procesos que se implican recíprocamente, reflejando el carácter dinámico de la Matemática y funcionando en forma cíclica e integrada.*
- *La designación "problemáticas"´, para diferentes unidades curriculares del campo, hace referencia a una posición crítica frente al saber matemático que procura desnaturalizar y complejizar su estatuto, dando cuenta de su origen, sentido y relevancia en el cuerpo de conocimientos propio de la disciplina.*

Problemáticas del Álgebra I

MARCO ORIENTADOR

Se privilegia la recuperación de experiencias de enseñanza que contemplen la diversidad de actividades que configura el trabajo algebraico: el tratamiento de lo general, la formulación y validación de conjeturas, la exploración y la posibilidad de resolver problemas de otras áreas. Se promueve la recuperación de problemáticas que, a lo largo de la historia, estructuraron los desarrollos centrales de la teoría de números, contemplando fundamentalmente las relaciones matemáticas que condujeron el proceso de algebrización de la Aritmética

En esta propuesta nos proponemos desafiar una lectura lineal de los ejes de contenidos, apelando a actividades que permitan una construcción progresiva de los sentidos y conceptos fundamentales de cada eje, a través de algunos problemas y tareas que implican una participación activa de los estudiantes. Estas actividades no agotan los contenidos del eje. Terminada la secuencia el docente retomará cada uno de ellos proponiendo actividades que permitan acceder a mayores niveles de sistematización y estructuración de la teoría involucrada. En términos generales, la bibliografía existente constituye un buen apoyo para planificar este último tipo de actividades, pero no suelen ser recursos adecuados para un primer abordaje, que es el que se propone en esta secuencia.

La propuesta se estructura en secciones, una por cada eje, que comienzan con la transcripción del eje según aparece en el Diseño Curricular, y continúa con una secuencia de actividades que se pueden dividir en dos bloques:

- **Actividades centrales**. Son las que se proponen para llevar adelante la propuesta, y que permiten un primer abordaje a los contenidos centrales de cada eje. Son actividades que apuestan a una participación activa de los estudiantes.
- **Actividades complementarias**. Son actividades sugeridas para dar continuidad a la propuesta. Será decisión del docente determinar si las mismas serán implementadas en un primer abordaje del eje, o se dejan para momentos posteriores donde se vuelva al eje para mayores niveles de sistematización de la teoría general.

En la la formulación de cada actividad, el docente encontrará:

- Los objetivos de la actividad.
- El texto para entregar a los alumnos.
- Las orientaciones para la gestión de la misma.

Al finalizar cada eje damos algunas sugerencias, actividades y/o bibliografía para que el docente pueda elaborar la continuidad de la propuesta.

EJE 1: La división entera y la relación de divisibilidad

El problema de la existencia y unicidad. La importancia de la división entera en relación a sus áreas de aplicación (sistemas posicionales, ecuaciones diofánticas, entre otros.). La divisibilidad como relación. Divisores y múltiplos.

Actividad 1.1

Objetivo: Analizar las técnicas usuales de división a la luz de la formulación del algoritmo de división, que establece la existencia y unicidad del cociente y el resto.

Texto de la actividad

Actividad 1

La figura 1 muestra imágenes que corresponden con técnicas conocidas para efectuar divisiones de números enteros.

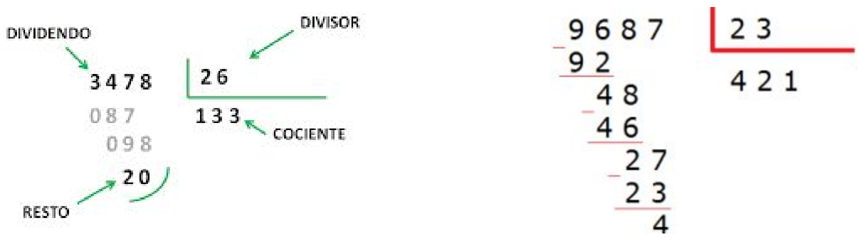


Figura 1: *Imágenes de las técnicas usuales de división.*

Por otro lado, la Figura 2 sugiere una manera de escribir las divisiones elementales que se realizan al utilizar estas técnicas.

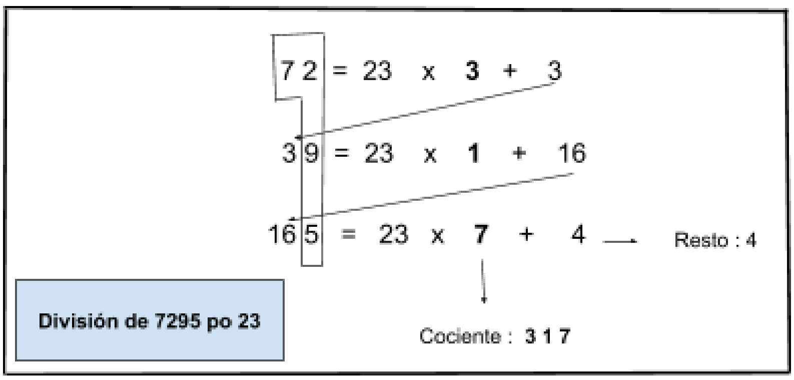


Figura 2: *Operaciones que se realizan en las técnicas usuales de división*

- ¿Puede asociar un conjunto de divisiones elementales (al estilo de la Figura 2) a cada división que se realiza con las técnicas mostradas en la Figura 1? ¿De qué manera?

- ¿Puede garantizar que las técnicas son correctas implementaciones del algoritmo de división entera?. Fundamente su respuesta
- Elabore un texto que pueda explicar estas técnicas usuales de división, y que abarque todos los casos posibles.

Orientaciones para el docente

La actividad 1 hace referencia a las técnicas que seguramente conocen los estudiantes para dividir, y pone el énfasis en la complejidad de las mismas. Se espera que no puedan dar cuenta de todas las operaciones que "esconden" estos procedimientos, y que comprendan la complejidad que tiene este tipo de técnicas.

No se presupone que los estudiantes hayan tenido previamente contacto con la formulación general del algoritmo de división tal cual como se la enuncia en el contexto del álgebra. Se espera que a través de discusión sobre las técnicas conocidas comience a construirse sentido en términos de la existencia y unicidad del cociente y el resto.

Una fundamentación completa de la validez de la técnica puede ser bastante engorrosa. Se sugiere que los estudiantes puedan justifica su validez al menos para casos particulares, con razonamientos como el que se muestra a continuación.

$7295 = 7200 + 90 + 5$

$7295 = 72 * 100 + 90 + 5$

$7295 = (23 * 3 + 3) * 100 + 90 + 5$ (Primera división elemental)

$7295 = 23 * 300 + 300 + 90 + 5$

$7295 = 23 * 300 + 39 * 10 + 5$

$7295 = 23 * 300 + (23 * 1 + 16) * 10 + 5$ (Segunda división elemental)

$7295 = 23 * 300 + 23 * 10 + 160 + 5$

$7295 = 23 * 300 + 23 * 10 + 165$

$7295 = 23 * 300 + 23 * 10 + (23 * 7 + 4)$ (Tercer división elemental)

$7295 = 23 * (300 + 10 + 7) + 4$

$7295 = 23 * 317 + 4$ (Forma final del algoritmo de división)

Para finalizar la actividad, se sugiere abrir el debate sobre las ventajas y desventajas de cada técnica para la enseñanza de la división, apelando previamente a una búsqueda de técnicas alternativas, como la que se describe en:

https://www.youtube.com/watch?v=IPBytfLf6Fw

Como actividad de cierre se sugiere formular de manera grupal el algoritmo de división en términos de la existencia de cociente y resto, para comenzar a generar un lenguaje que permita darle entidad propia más allá la técnicas que se conocen para implementarlo. Se pueden proponer situaciones en las que deben encontrar cociente y resto sin utilizar ninguna técnica, que involucre el manejar enteros negativos.

- Actividades complementarias -

Actividad 1.2

Objetivo: Revisar a la luz de las técnicas de división estudiadas algunos criterios de divisibilidad conocidos.

Texto de la actividad

Actividad 1.2

Un criterio conocido de divisibilidad es el siguiente: "*un número es divisible por 4 si el número formado por sus dos últimos dígitos es el mismo divisible por 4*".

Justifique este criterio apelando al conocimiento que ha adquirido sobre las técnicas usuales de división.

Orientaciones para el docente

Puede sugerirse a los estudiantes recurrir al razonamiento que justifica la técnica:

$$728 = 700 + 20 + 8$$

$$728 = (4 * 100 + 300) + 20 + 8$$

…

Se debe llegar de alguna manera al hecho significativo de que cualquier múltiplo de 100 es divisible por 4.

Como cierre de la actividad el docente puede sugerir alguna sistematización de las propiedades utilizadas, con el objetivo de comenzar a incorporar el lenguaje algebraico de la teoría de números. Por ejemplo, se puede establecer una definición formal para las relaciones "*es divisible por*" y "*es divisor de*", y se puede construir grupalmente una demostración para la propiedad

"Si a es divisible por 4 y b es divisible por 4 entonces a+b es divisible por 4"

También se puede introducir el símbolo | para denotar la relación "*es divisor de*", de manera que la proposición anterior quedaría expresada:

Si 4 | a y 4 | b entonces 4 | (a+b)

Actividad 1.3

Objetivo: Que el estudiante comprenda el algoritmo de división en su formulación general, e incorpore un lenguaje algebraico independiente de las técnicas de cálculo.

Texto de la actividad

Actividad 1.3

Desarrolle con su grupo una estrategia para afrontar el siguiente juego. El docente dará tres números enteros, *M, d, r,* satisfaciendo que son todos positivos, y que $0 \leq r < d$. Se debe proveer de la manera más rápida posible un número *n* satisfaciendo:

- *r* el resto de la división de *n* por *d*
- $|n| > M$

Orientaciones para el docente

El desarrollo de una estrategia de juego exige pensar el algoritmo de división con un sentido puramente algebraico, atendiendo a las relaciones

$$n = q\,d + r \qquad |n| > M$$

Una estrategia podría ser "*agrandar q hasta lograr* $|n| > M$". Es interesante que el docente explore la posibilidad de trabajar con números negativos.

Actividad 1.4

Objetivo: Que el estudiante incorpore y maneje el lenguaje algebraico relacionado con la noción de divisibilidad.

Texto de la actividad

Actividad 1.4

Utilizando el algoritmo de división encuentre una justificación para las siguientes afirmaciones:

- El producto de dos números enteros será impar sólo cuando ambos sean impares.
- Dados 3 números enteros consecutivos, alguno de ellos será múltiplo de 3.

Orientaciones para el docente

Probablemente el docente deba sugerir un planteo de la situación en términos simbólicos que les permita pensar el problema en términos del algoritmo de división. Es importante que los estudiantes tengan la posibilidad de elaborar sus propios argumentos (aun cuando sean incompletos y/o erróneos), y que luego se discutan colectivamente las soluciones propuestas.

Sugerencias para dar continuidad a la propuesta

Pensamos la continuidad de la propuesta para este eje en términos de reafirmación del lenguaje algebraico. Se sugiere abordar propiedades de la relación “ser divisor de”, como por ejemplo:

$$a \mid (b+c) \;\; y \;\; a \mid b \;\; entonces \;\; a \mid c$$

El docente decidirá si aborda la demostración del Algoritmo de División. La prueba tiene aspectos técnicos complicados que no aportan demasiado a la comprensión del resultado que expresa. En la bibliografía se pueden encontrar textos que pueden resultar material adecuado para este segundo abordaje del eje.

EJE 2: Estructura multiplicativa de los números enteros

El concepto de número primo. El significado del Teorema Fundamental de la Aritmética: el funcionamiento de la existencia y la unicidad.

Actividad 2.1

***Objetivos**:* Recuperar la descomposición en primos a través de la solicitud de desarrollar una estrategia para afrontar un juego.

Texto de la actividad. Parte A

Actividad 2.1. Parte A

Una ciudad posible

Disponemos de cubos de 5 colores: 7 cubos amarillos, 5 cubos anaranjados, 3 cubos rojos, 10 cubos rosados y 6 celestes.
Apilando cubos de un mismo color formamos un edificio, y juntando edificios de distintos colores formamos una ciudad.

¿Cuántas ciudades distintas se pueden formar?

Nota: No puede haber más de un edificio de cada color. Sólo importa la cantidad de edificios y su altura, no es relevante la disposición física (o sea cuál está primero, cuál segundo, etc.).

Orientaciones para el docente: Las estrategias adoptadas por los estudiantes pueden ser variadas: construir diagramas de árbol, representar los cubos con papeles de colores, etc. Se discuten las soluciones y los caminos recorridos para obtenerlos.

Se deberá indagar sobre el recorrido que los mismos han tenido por problemas de combinatoria y conteo. Si es necesario se puede pensar una revisión, para lo cual pueden ser útiles los materiales Biggs (1998) o Gentile (1965).

Texto de la actividad: Parte B

Actividad 2.1 Parte B

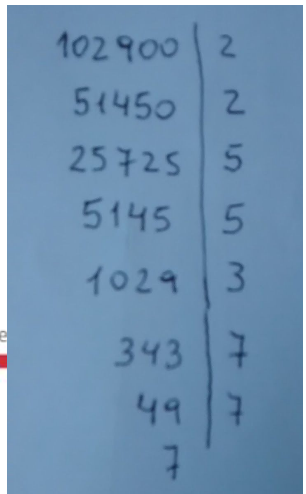
El profesor da un número natural k, y se debe proveer en el menor tiempo posible la respuesta a una pregunta ¿Cuántos divisores distintos tiene el número natural k?

Orientaciones para el docente

La intencionalidad de este juego es que los estudiantes sean capaces de desarrollar una estrategia para afrontar el juego.

Probablemente no sea necesario orientar hacia la búsqueda de los factores primos, ya que sin este concepto la búsqueda de divisores será en la práctica imposible si se da un número de 4 cifras.

Para facilitar el desarrollo de la estrategia se sugiere que los divisores primos del número en cuestión (llamémoslo *N)* sean todos menores que 10. Por otro lado se permite utilizar las calculadoras de los celulares.



Una investigación breve los llevará presumiblemente a utilizar alguna técnica de las usuales para obtener el listado de los factores primos.

Nuevamente se exponen algunas soluciones y se relacionan las estrategias asumidas con las del juego anterior.

Actividad 2.2

Objetivo: Que el estudiante comprenda la unicidad de la descomposición en primos a través de la imposibilidad de solución para una etapa de un juego.

Texto de la actividad

Actividad 2.2

El profesor da un número natural k, y se debe proveer en el menor tiempo posible dos secuencias de distinto largo de números primos que satisfagan lo siguiente: el producto de la primer secuencia se debe diferenciar del producto de la segunda secuencia en exactamente k.

Orientaciones para el docente

Por ejemplo, si el profesor da el número k = 6, una posible respuesta, quizá la "más corta" sería:

Secuencia 1: 2

Secuencia 2: 2,2,2

No se puede por ejemplo tomar la primer secuencia como “5” y la segunda como “11”, porque tienen ambas largo 1. Se pueden ensayar variantes que lo compliquen, por ejemplo: “el producto de cada secuencia debe ser mayor que un cierto número”. Por ejemplo, si forzamos a que el producto de cada secuencia sea mayor que 20, entonces una solución posible al planteo k = 6 sería:

Secuencia 1: 2,15
Secuencia 2: 2,2,2,3

Otra variante posible es poner un mínimo tamaño a las secuencias.

Conclusión del juego: **Pedir respuesta para el caso k = 0.** (Esta fase es muy importante, ya que se relaciona directamente con el TFA.)

Como actividad de cierre se sugiere:

1. Visitar materiales propuesto por Ernesto Paenza sobre números primos, como por ejemplo: https://www.youtube.com/watch?v=rK3zAVjM1a8, https://www.pagina12.com.ar/diario/sociedad/3-213400-2013-02-07.html
2. Reconstruir grupalmente el significado de la unicidad en el TFA. Preguntas sugeridas:
    a. ¿Puede ser que un número N se escriba de dos maneras posibles como producto de primos?
    $N = p_1 p_2 p_3$ $\quad N = q_1 q_2 q_3 q_4 q_5$ $\quad (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$ todos primos)
    b. Aceptemos que los primos son los mismos. O sea, si
    $$N = p_1 \ldots p_k \qquad N = q_1 \ldots q_i$$
    entonces $i = j$ y $\{p_1, ..., p_k\} = \{q_1, ... q_i\}$. ¿Puede por ejemplo haber 3 ocurrencias del primo 5 en $\{p_1, ..., p_k\}$ y 2 ocurrencia en $\{q_1, ..., q_i\}$?

- Actividades complementarias -

Actividad 2.3

Objetivo: Realizar un recorrido por materiales de enseñanza para resignificarlos a la luz de las nuevas herramientas algebraicas trabajadas en las actividades anteriores.

Texto de la actividad

Actividad 2.3

Recorrido 1 En un material (*) distribuido por el Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba se puede leer el siguiente cuadro. El mismo corresponde a ejemplos concretos de propuestas que podría presentar un docente a su grado/curso, elaborados en consonancia con los respectivos Diseños Curriculares.

Situaciones en las cuales la persona tiene que CALCULAR	Ejemplos
Estimar magnitudes, posibles resultados de cálculos	Estimar qué pares de números dan 1000 al multiplicarlos

A. El TFA brinda la herramienta teórica para dar una respuesta completa y acabada al problema que se plantea. ¿Cómo utilizaría el TFA para abordarlo?
B. ¿Cuál considera que es el sentido de la actividad que propone el cuadro? ¿Se le ocurre otra forma de abordarlo?
C. Escriba la solución pensada con el TFA de la forma más clara posible en un texto de una página, destinado a un público que no tiene conocimientos de matemática.

(*) MEJORA EN LOS APRENDIZAJES DE LENGUA, MATEMÁTICA Y CIENCIAS Una propuesta desde el desarrollo de capacidades fundamentales, Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, 2014. Fascículo 8, p. 32.

Actividad 2.4

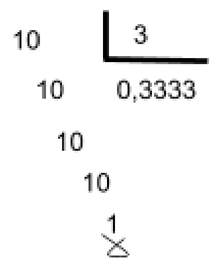
Objetivo: Realizar un recorrido por materiales de enseñanza para resignificarlos a la luz de las nuevas herramientas algebraicas trabajadas en las actividades anteriores.

Texto de la actividad

Actividad 2.4

En un material distribuido por el Ministerio de Educación de la Nación se puede leer el siguiente texto:

"*Las expresiones decimales pueden poseer un número finito o infinito de cifras decimales.*



El resto 1 se repite infinitamente, lo que provoca que en el cociente se repita la cifra 3. Notaríamos algo semejante con fracciones como 1/7 ó 1/30 , pero no ocurre lo mismo con 1/8 ó 1/20 . Si descomponemos en factores los denominadores, obtenemos:

3 = 3 x 1   30 = 3 x 5 x 2   8 = 2 x 2 x 2   20 = 5 x 2 x 2

En un tercio, 3 no se puede expresar como producto entre factores 2 y 5. Lo mismo ocurre con los denominadores 7, 30 y 8. Si los denominadores de las fracciones se pueden expresar con multiplicaciones de factores 2 y 5, las expresiones decimales correspondientes solo tendrán un número finito de cifras."

El TFA brinda la herramienta teórica para poder explicar lo que el texto afirma. Elabore esta explicación de la forma más clara posible. Escriba un texto pensado para un lector sin conocimientos de matemática.

(*) MATEMÁTICA: LEER, ESCRIBIR Y ARGUMENTAR Serie de cuadernos para el aula. Ministerio de Educación de la Nación, 2007. p. 13.

Orientaciones para el docente

En caso de que no puedan comenzar con estrategias de resolución, se les puede brindar la siguiente ayuda:

Ayuda: ¿Qué podemos deducir haciendo los siguientes cocientes?

$$\frac{1}{8} = 0 \,.\, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

$$\frac{10}{8} = a_1 \,.\, a_2 a_3 a_4 \ldots$$

$$\frac{100}{8} = a_1 a_2 \,.\, a_3 a_4 \ldots$$

Actividad 2.5

Objetivo Que el estudiante descubra la potencia del TFA como herramienta algebraica para resolver problemas.

Texto de la actividad

Actividad 2.5: *El problema de olimpíadas de Francisco*

El padre de Francisco se comunica con ustedes con intención de ayudar a su hijo con el siguiente problema, que recibió en una instancia de olimpíada matemática, y que lo tuvo bastante desconcertado. El problema decía lo siguiente.

> *Charly hace una lista de todos los números de 6 cifras tales que la multiplicación de todas sus cifras es igual a 2352 ¿Cuál es el número más cercano a 500.000 que escribe en esa lista?*

Comenta el padre de Francisco que su hijo comenzó razonando de la siguiente manera:

> *"El número debe ser menor que 500.000, entonces comienza con 4. Para ser lo más cercano posible tendría que seguir con 9, pero no puede ser porque 2352 no se puede dividir por 9. Como 2352 se puede dividir por 8 , entonces tiene que ser de la forma 48X.XXX .... "*

A. Se escribir un mensaje para enviar por correo electrónico al padre de Francisco, en el cual se explica un método para obtener la respuesta correcta que respete la forma de razonar de Francisco. Dado que la solución correcta no comienza con 48…, se debe explicar qué error está cometiendo. Se debe además poder justificar por qué el número que encuentra el método es efectivamente el más cercano a 500.000.
B. El padre de Francisco, en su afán por ejercitar a su hijo, les envía el siguiente mensaje: "*quise probar con otros números y no me sale. Probé con 3662…*". ¿Qué le responderían?

Orientaciones para el docente

En la discusión colectiva analizar el fundamento de alguna de las afirmaciones, por ejemplo: "*El número debe ser menor que 500.000".*

Analizar colectivamente alguno de los mensajes producidos seleccionados previamente por el docente. Si fuera necesario proponer una reelaboración de los mensajes.

- Sugerencias para dar continuidad a la propuesta -

Dar continuidad a la propuesta en este eje requiere la organización lógico-deductiva de conceptos y resultados para obtener una demostración del TFA. En la bibliografía se pueden encontrar textos que llevan adelante esta tarea. Se sugiere trazar una hoja de ruta que recorra los conceptos y propiedades necesarias y fundamentales para la demostración, ya que es frecuente que los textos incorporen una gran cantidad de resultados que no siempre son requeridos.

Se sugiere además buscar actividades que permitan apreciar la potencia del TFA como herramienta algebraica para resolver problemas. Por ejemplo construir justificaciones para propiedades como:

- $\sqrt{2}$ es un número irracional
- Existen n, m números enteros tales que $n^2 = 15m^2$

Otra aplicación importante y sorprendente del TFA que se sugiere abordar es utilizar la descomposición en primos para justificar la regla que permite encontrar al máximo común divisor y al mínimo común múltiplo.

Otro aspecto interesante podría ser abordar el tema de la infinitud de los números primos. Existe una prueba usual de la infinitud por reducción al absurdo, partiendo de la suposición de que los número primos son finitos, y tomando el número:

$$p_1 p_2 \dots p_n + 1$$

Aquí $p_1, p_2, \dots, p_n$ es la lista de todos los primos, y la contradicción se produce porque ese número también resultaría ser primo.

Esta demostración sería una buena oportunidad para recuperar aspectos histórica y epistemológicamente relevantes en el desarrollo del álgebra, como la legitimidad de este método de demostración. A continuación proponemos un texto para recuperar este aspecto. Se puede profundizar sobre este asunto recurriendo a Martínez y Piñeiro (2010), y Van Dalen (1994).

Nota histórico-epistemológica

La reducción al absurdo y las pruebas de que existe lo que no existe

Durante los siglos XIX y XX, en pleno furor de búsqueda de los fundamentos últimos de la matemática, la estrategia de reducción al absurdo fue puesta en cuestión. Vamos a revisar por qué.

En plena vigencia de la creencias (luego refutada por Godel) del Programa de Hilbert, la obsesión de los matemáticos preocupados por definir las bases sólidas de la disciplina era establecer "métodos seguros" que evitaran las paradojas que tuvieron en vilo a la matemática durante centurias. En particular, advertía Hilbert, al pasar de una idea de infinito "potencial" al infinito "como un todo", podrían sobrevenir paradojas como la de Zennon. La reducción al absurdo tiene que ver con este pasaje: esta estrategia de prueba nos permite establecer la equivalencia entre los siguientes predicados:

$$\neg \exists\, x\, P(x) \qquad\qquad \forall\, x\, \neg P(x) \qquad (1)$$

En efecto, tal equivalencia sería una generalización de la conocida ley de De Morgan:

$$\neg\,(\,P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)\,) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \dots \wedge \neg P(x_n) \quad (2)$$

Aquí la clave que señalaba Hilbert: pasar de la equivalencia (2) a la equivalencia de los predicados de (1), implica un pasaje de un infinito “potencial” a un infinito “como un todo”. Entonces, los métodos ya no serán “seguros” como se pretendía. En efecto, comienzan a suceder cosas al menos objetables.

Aceptando la equivalencia de los predicados de (1), y utilizando reducción al absurdo puedo proceder lógicamente como sigue:

Supongamos $\neg \exists x P(x)$. *Entonces tenemos que para todo* x *vale* $\neg P(x)$ …

(continúa la demostración)

… *llegamos luego a un absurdo, por lo tanto hemos demostrado que* $\exists x P(x)$

Ahora bien, ¿tenemos la posibilidad de acceder de manera efectiva a ese x que satisface la propiedad P? Porque la demostración es fuertemente no constructiva, en ningún momento hemos construido tal x.

Grande fue la sorpresa cuando matemáticos-lógicos demostraron un quiebre entre el sentido común de la expresión $\exists x P(x)$ y su significado formal, mostrando una sentencia de esa forma que puede ser demostrada, pero simultáneamente se demuestra que no existe manera de encontrar por procedimiento efectivos el x cuya existencia se prueba.

Este hecho entre otros produjeron a principios del siglo XX un tembladeral fundacional que dio por tierra el ambicioso proyecto fundacional de Hilbert, y abrió un terreno muy prolífico de investigación matemático-filosófica que se relaciona con conceptos fundamentales como el de verdad, demostración, decidibilidad, método científico, etc., que seguramente continuará por siglos.

A quien le interese profundizar sobre este tema puede recurrir a un valioso texto de divulgación citado abajo. Guillermo Martínez es un matemático-escritor argentino quien además fuera autor del libro “Crímenes imperceptibles”, que fue llevado al cine por el director Álex de la Iglesia bajo el nombre “Los crímenes de Oxford”.

Martínez, G, Piñeiro, G. (2010), Godel para todos. Editorial Destino

Eje 3: La congruencia

Su estudio como relación y como técnica para resolver problemas aritméticos.

Actividad 3.1.

Objetivo: Arribar al concepto de estructura modular a través del estudio del resto de la división.

Actividad 3.1 Carrera a 20

Participan dos jugadores que son contrincantes. El jugador A elige un número, que puede ser 1 o 2. El jugador B debe sumar al número elegido 1 o 2. Luego el jugar A suma al resultado 1 o 2. Asì sucesivamente cada jugador repite la operación, el jugador que diga 20 ganará la competencia.

Reunidos de a pares, repitan varias veces el juego, buscando una estrategia ganadora.

Orientaciones para el docente

Se sugiere llevar a sistematizar en términos del análisis del resto en el algoritmo de división: ¿cómo se justifica la estrategia ganadora desde la ecuación 20 = 3 * 6 + 2?
De esta manera es posible pedir que los estudiantes generen otras instancias del juego, donde se pueda definir una estrategia ganadora similar. Pedir por ejemplo que en el juego se pueda sumar 1, 2 o 3. ¿Hasta qué número haríamos la carrera?
Para finalizar, se introduce el concepto y notación de relación de congruencia.

- Actividades complementarias -

Actividad 3.2

Objetivo: Que el estudiante se familiarice con la notación y las propiedades de la congruencia en términos del lenguaje de las relaciones de equivalencia.

Actividad 3.2

Utilice el algoritmo de división para justificar las siguientes afirmaciones.

- $a \equiv a' \,(n) \;\; y \;\; b \equiv b' \,(n) \;\; implican \;\; (a + a') \equiv (b + b') \,(n)$
- $a \equiv a' \,(n) \;\; y \;\; b \equiv b' \,(n) \;\; implican \;\; aa' \equiv bb' \,(n)$

Orientaciones para el docente

Discutir en el grupo clase qué significa probar esas afirmaciones. Quizá con preguntas como:
¿Qué significa $(a + a') \equiv (b + b') \,(n)$ en términos del algoritmo de división?
¿Qué sabemos sobre los restos de la división de $(a + a')$ y $(b + b')$ por n de manera de poder compararlos?

Actividad 3.3

Objetivo: Que el estudiante perciba la potencialidad de la relación de congruencia para sistematizar razonamientos sobre propiedades numéricas que sin la misma se harían dificultosos

Actividad 3.3

Un criterio conocido de divisibilidad es el siguiente: "*un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es divisible por 3".*

Justifique este criterio apelando a la noción de congruencia.

Orientaciones para el docente

Se puede sugerir pensar el problema para números formados por dos dígitos solamente. Luego, para generalizar el razonamiento, es posible que se tenga que revisar la noción de representación decimal de un número. Se sugiere revisarla siempre en términos de la existencia y unicidad propuestas por el Algoritmo de división.

- Sugerencias para dar continuidad a la propuesta -

En muchos textos y páginas web se pueden encontrar aplicaciones de congruencias para la resolución de problemas. Sugerimos una dosificación adecuada para que la herramienta pueda comprenderse y apreciarse en todo su potencial, y que no quede reducida a la aplicación de complejas sucesiones de propiedades de congruencias que mágicamente producen un resultado, ni que se recurra a enunciados rebuscados para poder "producir" una aplicación supuestamente asombrosa de la herramienta.
Sugerimos como texto de consulta a Biggs (1998).

Eje 4: Los polinomios y su aritmética

Construcción y aritmetización de los polinomios. Operaciones básicas y propiedades en relación a los operadores aritméticos. Polinomios irreducibles y el problema de la descomposición de un polinomio como producto de polinomios.

Actividad 4.1

Objetivo: Establecer equivalencias entre expresiones algebraicas polinómicas a partir de la interpretación geométrica.

Actividad 4.1

Los matemáticos de Alejandría del siglo II a.C. hubiesen considerado la siguiente afirmación inaceptable (Sessa 2005 p.38):

"La ecuación $x(x-4) = x^2 - 4x$ *es válida por propiedad distributiva"*

Ahora bien, ellos hubieran quedado conformes con el siguiente razonamiento:

El número de casillas libres del tablero de la figura, que tiene x filas y x columnas, se obtiene contando el total de casillas menos 4 filas, o sea $x^2 - 4x$. Por otro lado, podemos contar las casillas libre calculando el área del rectángulo no ocupado por fichas que se aprecia en la figura, a saber: $x(x-4)$.

Esta metodología remite a uno de los usos más significativos de los números naturales: *contar*. Esta simple pero fundamental actividad humana dio origen a una de las ramas más fructíferas de la matemática: la *combinatoria enumerativa*. La misma propone una actividad matemática muy sencilla:

obtener igualdades de expresiones matemáticas identificando a cada una de ellas con el resultado una forma particular de contar todas las posibilidades de una situación.

Proponga justificaciones para las siguientes igualdades utilizando esta metodología.

- $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
- $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$
- $x(x-4) + 4(x-2) = x^2 - 8$
- $\sum_{k=1}^{x} k = x(x+1)/2$

Orientaciones para el docente

La actividad se espera que sea completamente autogestionada por los propios estudiantes. Quizá pueda efectuarse un cierre proponiendo que busquen que otras igualdades de relevancia en su experiencia matemática puedan justificarse con esta metodología.

Actividad 4.2

Objetivo: Que el estudiante diferencie en fenómenos matemáticos y extramatemáticos situaciones cuyo comportamiento es polinómico de los que no lo son.

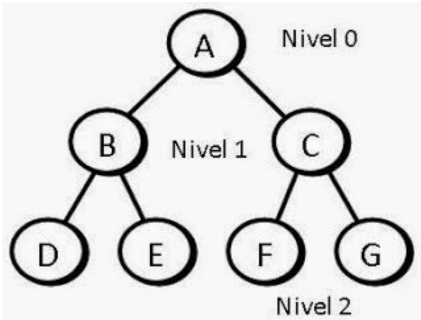
Actividad 4.2

Considere las siguientes funciones:

f(n) = número de ladrillos que conforman una cualquiera de las cuatro caras externas de la pirámide de la figura, que tiene n capas.

g(n) = número total de ladrillos que conforman la pirámide de la figura, que tiene n capas.

h(n) = número de nodos (letras en círculo) del “árbol” de la figura, que tiene n niveles.



Se debe encontrar una expresión algebraica que permita computar valores arbitrarios de las funciones. La expresión debe ser lo más sencilla posible, en particular no debe involucrar puntos suspensivos ni operadores de rango tipo sumatoria, etc.

Orientaciones para el docente

Se sugiere que los estudiantes tengan acceso a la web. El trabajo debería llevarlos a desarrollar la capacidad de diferenciar el comportamiento de “sumas” aparentemente similares como:

$$1 + 2 + 3 + \ \ldots \ + n$$

$$1 + 4 + 9 \ + \ \ldots \ + n^2$$

$$1 + 2 + 4 \ + \ \ldots \ + 2^n$$

En particular comenzar a distinguir cuándo estas se expresan como una expresión polinómica.

Actividad 4.3

Objetivo: Que el estudiante comience a construir las relaciones existentes entre las diferentes formas que adquiere la expresión algebraica que define un polinomio, y sus propiedades como función.

Texto de la actividad

Actividad 4.3

Dé las expresiones algebraicas correspondientes a dos funciones lineales f(x) y g(x), cuya función producto p(x) = f(x)g(x) alcance un valor máximo en los números reales. Escriban un breve texto que explique qué característica deben tener las funciones elegidas para constituir una solución.

Orientaciones para el docente

Una versión parecida de esta actividad puede encontrarse en Gema Fioriti y Carmen Sessa (coords.) (2015).

Se sugiere que los estudiantes puedan tener acceso a GeoGebra, pero no se les dará ninguna indicación sobre los recursos a utilizar. Dado que por trayectorias heterogéneas de los estudiantes puede haber mucha disparidad en relación a la construcción de la vinculación entre la expresión algebraica y la gráfica, esta actividad permitirá al docente tener un diagnóstico del grupo.

Actividad 4.4

Objetivo: Que el estudiante comience a construir las relaciones existentes entre las diferentes formas que adquiere la expresión algebraica que define un polinomio, y sus propiedades como función.

Texto de la actividad

Actividad 4.4

Dadas las funciones f(x) = x – 2, g(x) = x+3, h(x) = x – 5, se define m(x) = f(x)*g(x)*h(x).

Responda:

- ¿Qué relación hay entre las raíces de m y las de los factores?
- ¿Puede determinar los intervalos en los que m es positiva? Fundamente su respuesta.
- Responda lo mismo para la función m(x) = k*f(x)*g(x)*h(x), donde k es un número real.
- Elabore criterios para responder las preguntas anteriores cualquiera sean las raíces de f, g y h.

Escriba un texto de una página expresando de la manera más clara posible los criterios elaborados.

Orientaciones para el docente

Se sugiere que los estudiantes puedan tener acceso a GeoGebra, sin darles ninguna indicación sobre los recursos a utilizar.

Se sugiere que las producciones de los estudiantes (o los grupos) sean intercambiadas para su evaluación, pidiendo que cada lector de una producción exprese qué dificultad encontró en la lectura de la producción de su compañero.

Actividad 4.5

Objetivo: Que el estudiante comience a construir las relaciones existentes entre las diferentes formas que adquiere la expresión algebraica que define un polinomio, y sus propiedades como función.

Texto de la actividad

Actividad 4.5

Encontrar los factores asociados a los siguientes polinomios (o sea, los factores cuyo producto es el mismo polinomio):

- $x^2 - 4$
- $x^2 + 4$
- $x^3 + 2x^2 - 3x$
- $x^3 + 2x^2 - 7x - 2$
- $x^4 - 16$
- $x^4 + 3x^2 - 4$

¿Qué relación observa entre las raíces de cada uno de los polinomios y sus términos independientes?

Orientaciones para el docente

Probablemente algunos estudiantes apelen a formas conocidas de factorización de polinomios. Es importante que en la discusión colectiva se establezca la relación entre las dos actividades.

Se sugiere fuertemente que en alguna instancia del desarrollo de la actividad se recurra a Geogebra, para continuar estableciendo conexiones entre la forma del polinomio y las características de la gráfica.

Es necesario comenzar a hacer explícita en la discusión el problema de la existencia de raíces, y las diferencias que se establecen cuando los polinomios se consideran como polinomios con coeficientes complejos. Es posible que los estudiantes no hayan tenido contacto aún con el campo de los números complejos. En tal caso es un buen momento para proponer una primera visita, en tono informativo, llegando incluso a enunciar el Teorema Fundamental del Álgebra.

- Sugerencias para dar continuidad a la propuesta -

Una posible manera de dar continuidad al estudio de polinomios es intentar instalar la discusión sobre qué se entiende por “la estructura de los números enteros”, y en qué medida el conjunto de los polinomios “replica” esta estructura. . Se puede proponer efectuar una lista de las “componentes” de esa estructura, como por ejemplo:

- Una operación “suma”
- Una operación “producto”
- Un elemento neutro
- La posibilidad de dividir (!)
- La posibilidad de factorizar

(!) No es la intención que se aborde el tema de las técnicas de división de polinomios. Se puede abordar la existencia del algoritmo de división, o se puede obviar esta componente.

¿Hay similitudes con las operaciones de polinomios en términos de la propiedades que satisfacen?

¿Qué propiedades comunes pueden identificar?

Frente a la posibilidad de factorizar, deberían ser capaces de identificar cuáles serían los factores, y que propiedades los definen. Preguntas posibles:

- ¿Cómo definiría el equivalente polinómico a “número primo”?
- ¿Puede obtener un enunciado para la factorización de polinomios similar al TFA?

Bibliografía

Biggs, Norman (1998), Matemática Discreta, Editorial Vincent-Vives.

Fioriti, G. y Sessa, C. (coords.) (2015) Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas. Incorporación del programa GeoGebra al trabajo matemático en el aula. Editorial Universitaria (UNIPE).

Gentile, Enzo (1965), Notas de Álgebra, Editorial Eudeba. Reedición en la Serie A Fas. 22 de los Cursos y Seminarios de Matemática del Dto. de Matemática de la Universidad de Buenos Aires.

Kisbye, P, Miatello, R, Notas de Álgebra I/Matemática Discreta, http://www.famaf.proed.unc.edu.ar/pluginfile.php/14427/mod_resource/content/7/AlgI-MDI-2004.pdf

Martínez, G, Piñeiro, G. (2010), Godel para todos. Editorial Destino.

Sessa, C. (2005) Iniciación al Estudio Didáctico del Álgebra, Libros del Zorzal.

Van Dalen, D. (1994) Logic and Structure, Tercera edición, Springer Verlag.