MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DOCENTE

Articulación DGES - FAMAF[i]

Unidad Curricular: PROBLEMÁTICAS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Descripción de la propuesta

A continuación se presentan un conjunto de cinco situaciones disparadoras de contenidos específicos correspondientes a los ejes del espacio curricular. Las mismas no representan la totalidad de experiencias que transitarán los estudiantes sino que serán complementadas, según el criterio del docente a cargo, tanto en aspectos teóricos como prácticos considerando las indicaciones del diseño curricular, las recomendaciones presentadas en este documento y las problemáticas que manifiesten los estudiantes.

Fundamentación

Enseñar matemática en cualquier nivel del sistema educativo representa un desafío, un mundo altamente tecnologizado y lleno de incertidumbres pone en crisis las certezas acerca de las experiencias que posibilitan una verdadera alfabetización en ciencias. Por otro lado las tareas que se resuelven en un Profesorado de Educación Secundaria en Matemática no deberían ser equivalentes a las resueltas por un futuro técnico, ingeniero o licenciado pues el saber matemático debería ocupar un rol diferente. Además asumimos, y es una constante en las aulas de matemática, que la sola enunciación de definiciones, teoremas, axiomas y ejemplos no promueve naturalmente aprendizajes significativos válidos de ser transferidos a otros ámbitos y en otros momentos que no sean los exclusivos de la clase de análisis matemático.

En especial la alfabetización en análisis matemático implica cuestiones más profundas que la aplicación de técnicas que permitan graficar, derivar o integrar complejas funciones. Comprender el cálculo infinitesimal implica problematizar los procesos de variación y cambio presentes en fenómenos simples y complejos para así describirlos no sólo en términos algebraicos, sino también verbales, numéricos y geométricos. Es por ello que luego de un proceso de reflexión y de reelaboración se presenta para Problemáticas del Análisis Matemático I una serie de actividades que apuntan a que los estudiantes del profesorado puedan estudiar y problematizar el cambio de una variable con respecto a otra en diversas situaciones, reconociendo esa variabilidad en tablas numéricas, gráficas y expresiones algebraicas, ampliando el trabajo matemático a los procesos de justificación y comunicación de relaciones y resultados obtenidos. Esta secuencia de tareas no pone el énfasis en actividades que involucran la aplicación de técnicas y procedimientos, que bien son conocidas por los docentes y pueden encontrarse en cualquier libro de texto, sino que se enfoca en privilegiar el espacio para las interpretaciones estableciendo una red de significados que pueda mostrar un Análisis Matemático colmado de sentidos.

Por otro lado asumimos que los estudiantes poseen un conjunto de saberes y capacidades que les permite afrontar estas situaciones desde el camino de la exploración, la experimentación y la investigación derivados de su paso por los niveles obligatorios y por espacios curriculares de primer año como "Modelización Matemática" en los cuales ya ha podido manipular, relevar e interpretar información.

Consideramos además que profesor y estudiantes funcionan como un equipo en el cual los estudiantes buscan estrategias para afrontar las situaciones propuestas pero el docente gestiona momentos y espacios retomando constantemente las formas de resolución y estableciendo un camino de preguntas que permite que el conjunto de la clase evolucione en la comprensión de los objetos y significados.. El docente es un actor destacado para llevar adelante esta propuesta, nadie mejor que él para indagar en las expresiones y en las dudas de los estudiantes, nadie más capacitado para agregar actividades que mejoren los aprendizajes y posibiliten el salto cognitivo necesario para lograr las formulaciones deseadas. El diálogo debe ser constante permitiendo una construcción colectiva y constante.

Tanto docentes como estudiantes encontrarán en las nuevas tecnologías un espacio de interacción con los objetos matemáticos que no sólo permite representaciones rápidas que validan procedimientos y técnicas sino que también generan dudas, promueven interrogantes, acercan a la formulación de argumentaciones y conclusiones, resignifican ideas y conceptos y establecen un marco de discusión de ideas entre pares y con el profesor.

Eje del diseño en el que se inscribe

La propuesta se inscribe mayormente en el eje "Modelos matemáticos del Análisis", para entender a la función como una herramienta de modelización y así trabajar con los principales tipos de funciones y las nociones de límite. El docente del espacio curricular completará con definiciones, técnicas y teoremas que considere convenientes. No obstante se proponen amplias situaciones problemáticas a los ejes transversales “fenómenos variacionales” y “los conceptos centrales de integral y derivada”.

Acompañando las actividades se presentan objetivos,recomendaciones para el docente, contenidos para abordar, tiempos de aplicación y formas de evaluación.

Atendiendo a las demandas y complejidades que sabemos que tienen nuestros estudiantes de nivel superior y acompañando el desarrollo anual del espacio curricular un estudiante por clase deberá realizar un texto de no más de 15 líneas que muestre lo acontecido en el espacio curricular. Cómo guía para realizar el registro se propone compartir con los estudiantes la siguiente guía de preguntas que sólo es orientativa pero que les permitirá focalizar en aspectos relevantes para sus aprendizajes y el de sus compañeros:

¿se abordaron contenidos/ procedimientos nuevos en esta clase o fue una clase de repaso?,¿notaste una conexión con lo trabajado en oportunidades anteriores?,¿la actividad resuelta te acercó a un objeto matemático nuevo, cuál?,¿qué característica tenía la tarea a resolver?¿para resolver la tarea se tuvo que aplicar un procedimiento nuevo o uno ya conocido?¿fue necesaria la elaboración de tablas o gráficas para avanzar en los proceso de resolución?,¿existieron puntos críticos en los cuales el docente tuvo que intervenir para permitir la resolución de la situación?,¿crees que entendiste lo que se hizo en clase?,¿crees que tus compañeros entendieron lo realizado?,¿tú o tus compañeros pararon el desarrollo de la clase para resolver alguna duda y cuál era esa duda?, ¿crees que necesitabas más conocimientos previos para llevar adelante la actividad?,¿realizaste más de un intento para resolver la actividad?,¿buscaron información extra en algún medio, cuál fue esa información?, ¿qué propuestas hiciste o hicieron tus compañeros?,¿tuviste que ayudar a tus compañeros en la aplicación de algún concepto o procedimiento?,¿lograste identificar errores durante tu proceso de resolución o el de tus compañeros, cuáles?

Es importante que el docente destaque que no se trata de un cuestionario exhaustivo a responder sino de una guía que puede orientar al estudiante a la elaboración del texto requerido. Sería conveniente además que estos registros sean elaborados en un documento compartido.

Otra cuestión que puede tener en cuenta el docente del espacio curricular al proponer las actividades de esta planificación es presentar el primer ítem de cada actividad y recién luego de que esa pregunta sea resuelta continuar con la siguiente.

De manera complementaria, y para facilitar el seguimiento de la propuesta, el docente a cargo del espacio curricular responderá las siguientes preguntas por clase:¿qué actividades se implementaron?, ¿cuál fue el tiempo destinado por actividad?, ¿qué dificultades encontró en la implementación?,¿Qué modificaciones hizo/haría para mejorar la actividad?, ¿Qué aspectos le parece interesante rescatar de los aportes, los debates y las producciones de los estudiantes, que permitan dar evidencias de lo que sucedió en el aula? (Puede adjuntar las respuestas de los estudiantes, fotos, archivos, etc. que sean pertinentes y aporten a la descripción de lo acontecido en clase)?, ¿cómo proyecta la próxima clase?

Objetivo general

Al finalizar la secuencia el estudiante podrá comprender relaciones variacionales presentes en diferentes fenómenos como así también establecer esa comprensión en términos de dos nuevos objetos matemáticos: derivada e integral.

Estructura de la propuesta

Primer conjunto de actividades: La función como herramienta de modelización

Actividad N°1.1

Tiempo estimado: 2 hs cátedra.

Objetivos:

Que los estudiantes pongan en juego sus saberes funcionales previos gracias al análisis de un fenómeno simple y cotidiano.

En grupos de dos estudiantes trabajar sobre la siguiente situación:

Elaborar una torta tiene muchas etapas. La primera es preparar la mezcla, ponerla en un molde y luego cocinar esa mezcla que genera el bizcochuelo. ¿Cuales son las variables que cambian desde que comienza la cocción hasta que retiramos el bizcochuelo del horno? Representa esas variaciones gráficamente y describe con palabras la información representada en los gráficos.

Recomendaciones para el docente

Se espera que los estudiantes caractericen mediante diferentes gráficos las relaciones entre variables que pueden presentarse al preparar un bizcochuelo identificando no sólo cantidades que cambian sino también analizando cómo cambian. Esas relaciones pueden ser la altura de la mezcla en el molde al transcurrir el tiempo, la humedad del bizcochuelo al transcurrir el tiempo o la temperatura del horno al transcurrir el tiempo. Es esperable que surjan múltiples relaciones de dependencia, todas deben ser valoradas y analizadas, dado que esta actividad de recortar un aspecto de la realidad estableciendo relaciones que son plasmadas en un gráfico encarnan un parte fundamental del análisis matemático y brinda un marco de trabajo que da cuenta de un forma de pensar el análisis matemático que deberá sostenerse en el transcurso del año.

Se debe incluir un momento de exposición por parte de las estudiantes que involucre la discusión de los gráficos elaborados agregando posibles valores numéricos a las representaciones.

Actividad N° 1.2

Objetivo

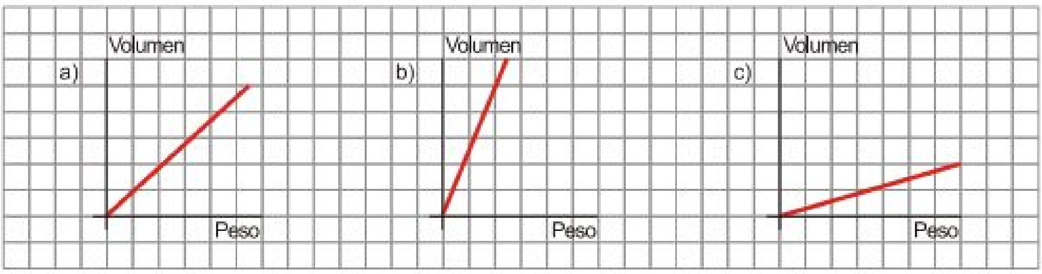
Que los estudiantes reflexionen sobre diversos fenómenos representando esas relaciones variacionales en forma algebraica, verbal y gráfica.

Tiempo estimado: 4 hs cátedra (3 horas cátedra para resolver y una para socializar)

Nota: es muy importante es que las estudiantes escriban sus explicaciones.

Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

1) Une cada materia con la gráfica que relaciona su peso con su volumen. Elabora una explicación que justifique las elecciones.



1. Garbanzos
2. Algodón

3. Plomo

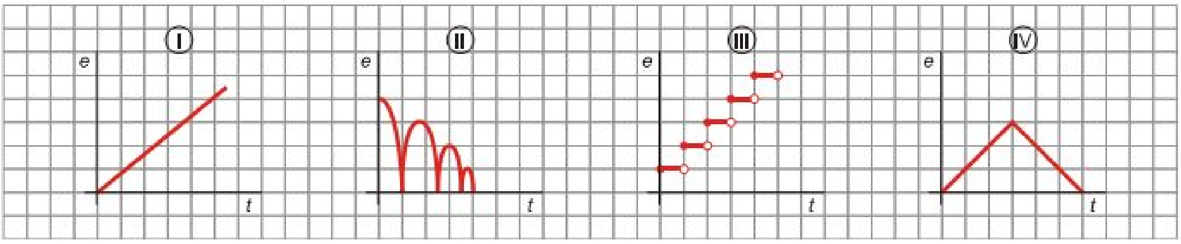
Indicar en qué se diferenciarán las expresiones algebraicas de cada representación gráfica.

Recomendaciones para el docente

Es necesario permitir que los estudiantes brinden justificaciones verbales acerca de sus elecciones, poner en palabras las relaciones entre variables que se evidencian es un trabajo que no sólo favorece el trabajo académico entre pares sino que también es un ejercicio que mejorará las futuras prácticas docentes.

Por otro lado cuando la actividad refiere a las expresiones algebraicas, no se busca llegar a la fórmula de cada función, por el contrario el análisis debe realizarse a la luz del reconocimiento de la presencia de funciones lineales, cuya diferencia radica en el valor que toma la pendiente.

2) Asocia cada enunciado a la gráfica que podría corresponderle:



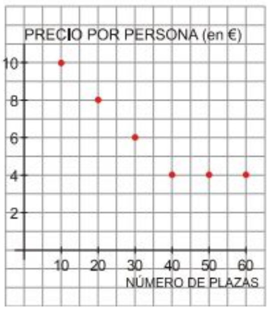
a) Altura de una pelota que bota, al pasar el tiempo.
b) Coste de una llamada telefónica en función de su duración.
c) Distancia a casa durante un paseo de 30 minutos.
d) Nivel del agua en una piscina vacía al llenarla.
e) Describir cómo debería ser la expresión algebraica de cada función y porque.

Recomendaciones para el docente

Luego de que los estudiantes realicen la asociación correspondiente, sería conveniente que se retome la expresión de la consigna "podría corresponderle" para analizar cuales son las condiciones que se asociaron a cada expresión verbal para realizar la correspondencia. Por ejemplo, asociar el nivel de agua en una piscina vacía al llenarla con el primer gráfico, implica pensar que el ritmo con el cual se llenó la pileta siempre se mantuvo constante, estos y otros análisis deben ser llevados adelante para despertar un análisis crítico de las relaciones variacionales y las formas con las que usualmente las representamos y describimos. Es valorable ver que muchas veces realizamos omisiones que responden a un recorte de la realidad mientras que en otras se produce una trivialización de ciertos objetos y estructuras matemáticas.

Por otro lado la descripción de la expresión algebraica apunta a un análisis del tipo de expresión y no de la expresión exacta, diferenciar funciones lineales de cuadráticas, reconocer funciones definidas por partes así como discutir la presencia de huecos en las representaciones permite generar una serie de relaciones en las ideas y conceptos que luego serán reforzados mediante tareas más formales.

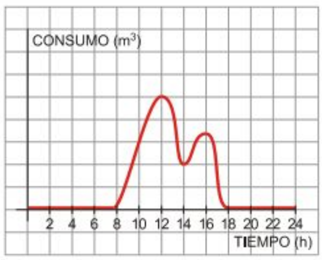
3) Se va a organizar una excursión y el precio por persona va a depender del número de personas que vayan a dicha excursión. El número máximo de plazas es de 60, y el mínimo, 10, admitiendo solamente grupos de 10 personas. La siguiente gráfica nos muestra la situación:



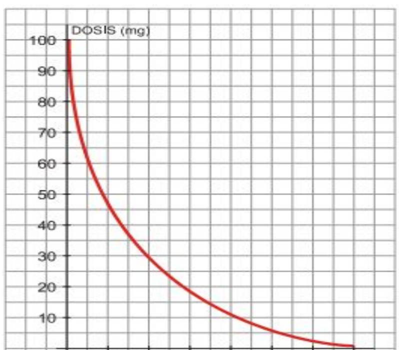
a) ¿Qué significado tiene el punto (20, 8)? ¿Y el (40, 4)?
b) ¿Por qué hemos dibujado la gráfica solo entre 10 y 60? ¿Podríamos continuarla?
c) ¿Por qué no se unieron los puntos?

4) El consumo de agua en un colegio viene dado por esta gráfica:

a) ¿Durante qué horas el consumo de agua es nulo? ¿Cómo te das cuenta?
b) ¿A qué horas se consume más agua? ¿Cómo puedes explicar la existencia de esos puntos?
c) ¿Qué horario tiene el colegio?
d) ¿Por qué en el eje X solo consideramos valores entre 0 y 24? ¿Qué significado tiene?



5) Se sabe que la concentración en sangre de un cierto tipo de anestesia viene dada por la gráfica siguiente:



a) ¿Cuál es la dosis inicial? ¿Tiene algún nombre especial ese elemento en el ámbito de las funciones?¿Cuál es ese nombre?

b) ¿Qué concentración hay, aproximadamente, al cabo de los 10 minutos? ¿Y al cabo de 1 hora? ¿Cuál sería la concentración a las dos horas?¿Porqué?

c) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la variable dependiente?

d) A medida que pasa el tiempo, la concentración en sangre de la anestesia, ¿aumenta o disminuye?

Recomendaciones para el docente

Con esta primera actividad, previa a establecer cualquier tipo de definición, los estudiantes pueden trabajar con elementos básicos del análisis funcional como variación, dependencia, correspondencia. Naturalmente surgirán conceptos como par ordenado, variable dependiente e independiente, parámetros característicos de la función lineal, existencia de máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, asíntotas, dominio e imagen de una función. Las justificaciones que realicen los estudiantes constituyen un puente para la formalización de los conceptos trabajados intuitivamente.

Segundo conjunto de actividades: modelos matemáticos del Análisis

En general las tareas a resolver buscan que la información presentada en los problemas sea relevante para la exploración y análisis de tablas o gráficos. La manipulación sobre cantidades no puede realizarse sin comprender qué variables se están relacionando,qué aspectos han sido recortados o cuales son los condicionamientos que afectan esas relaciones. Con esto queremos superar la reducción del análisis matemático a la manipulación de expresiones algebraicas que minimizan la noción de variable a la de incógnita y la construcción de gráficas como finalidad de esa manipulación simbólica. Las tablas de números, los gráficos, las expresiones verbales poseen características que podrían llegar a traducirse a una expresión algebraica, sin embargo se deben reconocer y trabajar otras capacidades asociadas al aprendizaje del cálculo diferencial como el reconocimiento de las regularidades presentes, las limitaciones de esas regularidades, las predicciones que se podrían realizar, la posibilidad de generalización a otras situaciones y la necesidad de un lenguaje específico para comunicar resultados. Con esto no queremos desmerecer el lugar que el álgebra ha sabido ganarse dentro de los espacios de producción matemática, su carácter generalizador facilita muchos procesos de resolución pero no debemos perder de vista que la funciones poseen un carácter modelizador por excelencia al cual sólo se accede si se produce un ida y vuelta constante entre la situación a analizar y las relaciones matemáticas que se pueden rescatar.

Objetivos

Que el estudiante:

- caracterice y diferencie las principales tipos de funciones: lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica y trigonométricas.
- reconozca y aplique las características esenciales de cada tipo de función al análisis de situaciones del ámbito matemático y extramatemático.

Tiempo estimado para Actividad N°2.1 y N°2.2: 4 hs cátedra

Actividad N°2.1

En el ámbitos de las ciencias, la densidad es una propiedad física que describe numéricamente que tan compacta es una sustancia, evidenciando, por ejemplo, que una tonelada de ladrillos no tiene el mismo volumen que una tonelada de plumas. Esta magnitud que expresa la relación entre la masa y el volumen de un cuerpo (m/v), es decir es la

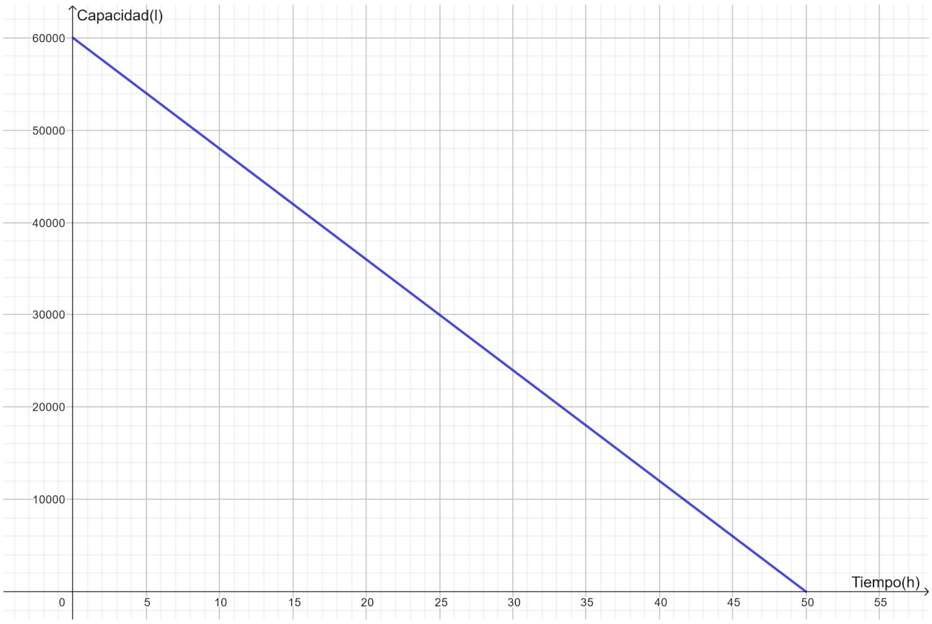
cantidad de materia (masa) que tiene un cuerpo en una unidad de volumen, permite categorizar e identificar distintos tipos de materiales. La aplicación y comprensión del concepto de densidad permite llevar adelante diferentes procesos de interés científico, social y económico.
A continuación se muestra una tabla en la que se muestra las masas de diferentes cuerpos y sus respectivos volúmenes. ¿Se podría decir que los cuerpos medidos tienen el mismo material?¿Porque?

Masa (g)	Volumen (cm^3)
237	30
434,5	55
553	70
647,8	82

a) ¿Qué características creen que se visualizarán al representar diferentes volúmenes y las correspondientes masas de esos cuerpos en un sistema de ejes cartesianos?
b) Escriba una expresión algebraica que represente la dependencia de la masa con respecto al volumen de este material.

Actividad N°2.2

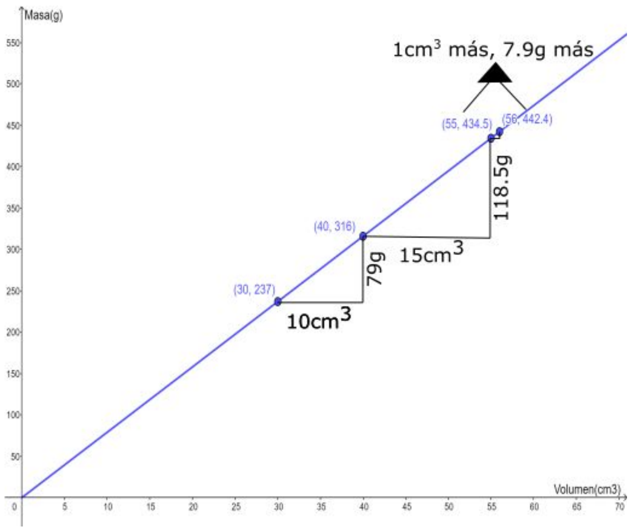
Una pileta de 10 m de largo, 4m de ancho y 1,5m de profundidad se vació, a un ritmo constante 12000 litros las primeras 8 horas. Indicar si los siguientes gráficos podrían representar el fenómeno, suponiendo que el ritmo con el cual se vacìa la pileta se mantiene constante. Explica la elección realizada.



A continuación escriban cómo sería la expresión algebraica que representaría la relación entre la capacidad de la pileta y el tiempo que tarda en llenarse.

Recomendaciones para el docente

Con respecto al primer problema se busca que los estudiantes pueden reconocer características relevantes de una función lineal. Si bien para responder si se trata del mismo material sólo es necesario realizar el cociente entre las masas y sus respectivos volúmenes (corroborando que el cociente es siempre el mismo), para indicar qué se visualizará al representar esos puntos en los ejes cartesianos sin realizar la representación, se necesita un nivel de profundización y abstracción superior. Notar que los pares ordenados correspondientes a masa y volumen quedan alineados exige interpretar la densidad obtenida al realizar los cocientes. Para lograrlo el docente puede realizar interrogantes que inviten a la interpretación, ¿qué significa el 7,9?,¿qué unidades de medida acompañarían esa cantidad?, ¿es correcto decir que por cada cm^3 la masa aumenta en 7,9g o deberíamos indicar que por cada gramo el volumen aumenta 7,9 cm^3?.Otra estrategia a utilizar para que se evidencie que los puntos están alineados sería ubicar uno de los pares ordenados en el sistema cartesiano y preguntar ¿cómo ubicarían otro par ordenado, distinto de los trabajados, del mismo material?. Este énfasis en la interpretación de la pendiente permitirá que los estudiantes asocien la idea de que si una razón de cambio se mantiene constante, los puntos que dan lugar a esa razón de cambio se encuentran sobre una recta, en esta caso un recta que pasa por el origen. El docente debe aprovechar esta instancia para comparar estas ideas con la noción de proporcionalidad. Los estudiantes pueden dejar registradas en sus carpetas la recta correspondiente, los puntos presentados originariamente y otros que surjan de la relación variacional. Al finalizar se puede elaborar la expresión algebraica que representa esa relación, como así también discutir la validez de trazar una recta para representar todas las posibles relaciones entre masa y volumen. ¿Qué sucede con los irracionales de la recta trazada?, ¿corresponden con masas y volúmenes de un materiales?



La segunda actividad, también permite avanzar en la interpretación de la pendiente de una función lineal. En primer lugar el enunciado del problema obliga realizar una traducción de las dimensiones de la pileta a su capacidad. Luego de realizar una interpretación de la tasa de cambio que expone el problema algunos estudiantes podrían pensar que como por hora la pileta tiene 1.500 litros menos, entonces luego de una hora en la pileta habrá 48.500 litros, pero por aproximación ambos gráficos podrían representar la relación buscada.Los estudiantes deben buscar otras cantidades que respondan a esa variación de 1.500 litros menos por hora para elegir el gráfico correcto. Pensar cuando no habrá más agua en la pileta, o cuánta agua habrá a las 20 o 25 hs también puede ayudar a la elección.Luego los

estudiantes pueden elaborar la expresión algebraica, no sólo del gráfico elegido, sino también del que no corresponde, para que nuevamente analicen relaciones entre variables.
Una vez que se tienen la expresión algebraica se puede realizar un análisis acerca de qué tipo de preguntas se podrían responder al manipular la representación algebraica de la función. Con este cuestionamiento pretendemos por un lado, ver que gracias a la expresión analítica de una función se puede saber la imagen que le corresponde a los valores del dominio y viceversa, se puede averiguar la raíz de la función, se puede saber si la función crece o no, pero la sola aplicación de técnicas no permite establecer el dominio de variabilidad ni tampoco permite realizar predicciones para cualquier valor de la variable independiente pues esto sólo se logra otorgando un significado a las variables y a las relaciones entre ellas.
Finalmente se pueden dejar presentadas las estructuras formales asociadas a la función lineal.

Actividad N°2.3
Tiempo estimado: tres horas cátedra

Una persona desea destinar un sector de su patio para una mini huerta que tendrá forma rectangular. Aprovechará que el sector trasero se encuentra delimitado por un río y usará los únicos 80 metros de alambre para cercar, con solo una vuelta, los otros tres lados del rectángulo.
a)Analizar numéricamente cómo varía la superficie que finalmente quedará para la huerta en función de las dimensiones. Escribir todas las conclusiones a las que arriben.
b)Elaborar una expresión algebraica que modele esta situación. ¿Qué otras características pueden ver al representar al graficar esta expresión?

Recomendación para el docente

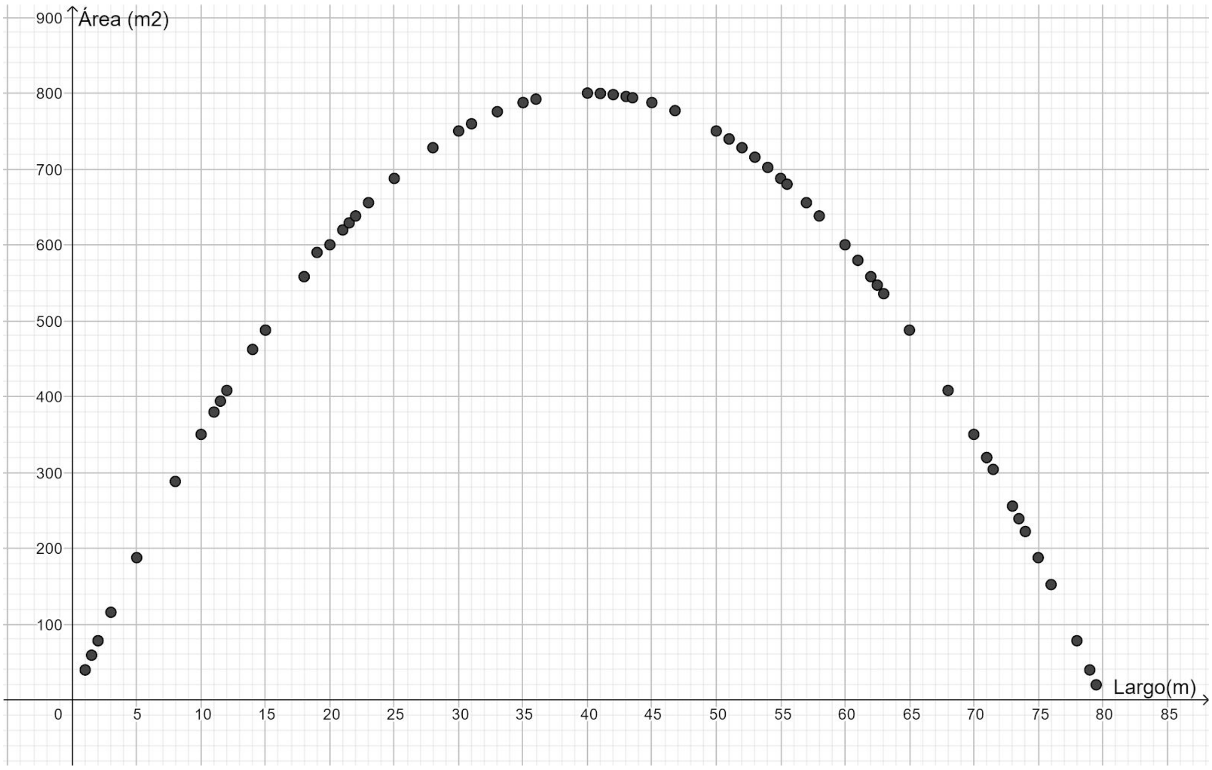
La actividad está pensada para que los estudiantes elaboren una tabla donde se evidencie la variación de la superficie para distintas medidas del ancho (o largo) de la huerta. Cómo se busca que el estudiante pueda visualizar y concluir que la variación del área en función del largo (o ancho) no es constante, no es siempre creciente ni siempre decreciente y tiene un máximo, el docente puede, luego de que los estudiantes realicen sus primeros intentos, indicarles que realicen una tabla donde el largo (o el ancho) siempre crezca o siempre decrezca. Por otro lado también sería conveniente, para facilitar las interpretaciones, que se llegue un acuerdo que determine si lo que van a variar va ser el ancho o el largo. A posterior de que cada estudiante tenga su propia tabla, y sus conclusiones, el docente puede crear una tabla en el pizarrón donde se muestre valores del largo (o ancho) y las áreas correspondientes para llegar a conclusiones generales que hablen del máximo, de los intervalos para los cuales el área crece y para los que el área decrece. No hace falta construir una tabla numérica extensa para realizar esas conclusiones. Con una tabla como la siguiente es posible realizar todas esas inferencias:

Largo (m)	Área (m^2)
10	350
15	487,5
20	600
25	687,5
28	728
30	750
35	787,5
40	800
45	787,5
60	600
65	487,5
70	350

Una tabla como la construida permite visualizar que a cambios iguales en una variable no corresponden cambios proporcionales en la otra, que el área aumenta y luego disminuye, permitiría también visualizar que a dos valores diferentes del largo le corresponde una misma superficie y con esto volver a discutir el concepto de función. Se puede avanzar más sobre propiedades de la función cuadrática preguntando cuánto valdría el área cuando el largo es 52 m, o cuando el área es 50m o 55m. Así podría surgir la presencia de un eje de simetría y la característica que cumple dentro de una función cuadrática.

Otra cuestión interesante a analizar es cómo las segundas diferencias, cuando la variación en la variable independiente se mantiene constante, es también constante. Esto también es posible de ser construido por los estudiantes.

Se puede mostrar una gráfica con algunos pares ordenados que representen la relación entre el área y el largo para profundizar los análisis elaborados.



No debería incidirse en la elaboración de una fórmula para modelar la situación hasta que se llegue al ítem b. Aquí el docente puede guiar a los estudiantes hasta construir la expresión analítica buscada. Un aspecto interesante que puede complementar las tareas realizadas es analizar qué valores puede tomar la variable independiente. En paralelo se podría discutir también qué debería acompañar la expresión algebraica construida para que tenga validez en el contexto del problema. ¿"L" puede valer cualquier tipo de número?, ¿cómo afecta eso al dominio y a los valores que puede tomar "A"?.

Es así que a través de todo este proceso, no sólo se abordan caracterìsitcas de la función cuadrática sino que también se revisa el concepto de función propuesto, se abordan caracterìsticas de los campos numéricos y se promueve un análisis dinámico.

Finalmente el docente puede caracterizar la función cuadrática, sus representaciones algebraicas y las posibilidades de análisis que cada una de ellas ofrece.

Actividad N°2.4

Tiempo estimado: 2 hs cátedra

Un problema importante en oceanografía es establecer la cantidad de luz que puede penetrar en distintas profundidades oceánicas. La Ley de Beer-Lambert afirma que hay un modelo para este fenómeno, en el que están presentes las variables referentes a la cantidad de luz, que llega a una profundidad x de metros y la intensidad de luz emitida desde un foco luminoso en la superficie. Un buzo, registró la intensidad de luz, medido en cal/cm^2/seg, y a x metros de profundidad en la siguiente tabla:

Profundidad en metros x	Intensidad de luz y
0	20,00000
1	12,00000
2	7,20000
3	4,32000
4	2,59200
5	1,55520
6	0,93312

a) ¿Cuál sería la intensidad a los 7 metros?
b) Caracteriza la secuencia numérica y elabora una expresión algebraica que permita obtener la intensidad de la luz para cualquier profundidad.

Recomendaciones para el docente

Si bien no es tan simple para muchos estudiantes encontrar la regularidad que establece la relación entre la profundidad y la intensidad de la luz es importante recuperar los modelos trabajados previamente, lineal y cuadrático, para notar, al menos, que no son esos los que representan las relaciones variacionales de esta situación.Si los estudiantes no lo intentan, el profesor puede preguntar ¿qué porcentaje de intensidad va quedando a medida que se desciende un metro más? Con esta pregunta se puede guiar a la ampliación de la tabla original a una tabla como la la siguiente:

Profundidad (m)	Intensidad de la luz (cal/cm^2/seg)
0	20

1	12 = 20.0,60
2	7,2=20.0,60.0,60=20.0,60^2
3	4,32= 20.0,60.0,60.0,60=20.0,60^3
4	2,59=20.0,60.0,60.0,60.0,60=20.0,60^4

Luego de la construcción y ampliación de esta tabla los estudiantes estarán en condiciones de proponer la función exponencial correspondiente y con la intervención pertinente del docente se pueden evidenciar características esenciales de esta función.

A continuación es posible definir y caracterizar la función exponencial. Acompañado de algún graficador es conveniente el análisis dinámico de funciones como $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = e^{\frac{x}{5}}$, $y = 4e^{(x-2)}$ y $y = e^3 e^x$.

A continuación un conjunto de situaciones problemáticas de funciones lineal, cuadrática y exponencial son accesibles de resolver en 6 hs cátedra (considerando un arduo trabajo extraulico). Se sugiere tomar algunas situaciones problemáticas del Capítulo 1 y 2 de http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/matematica-cuadratica.pdf para problematizar a la función cudrática.

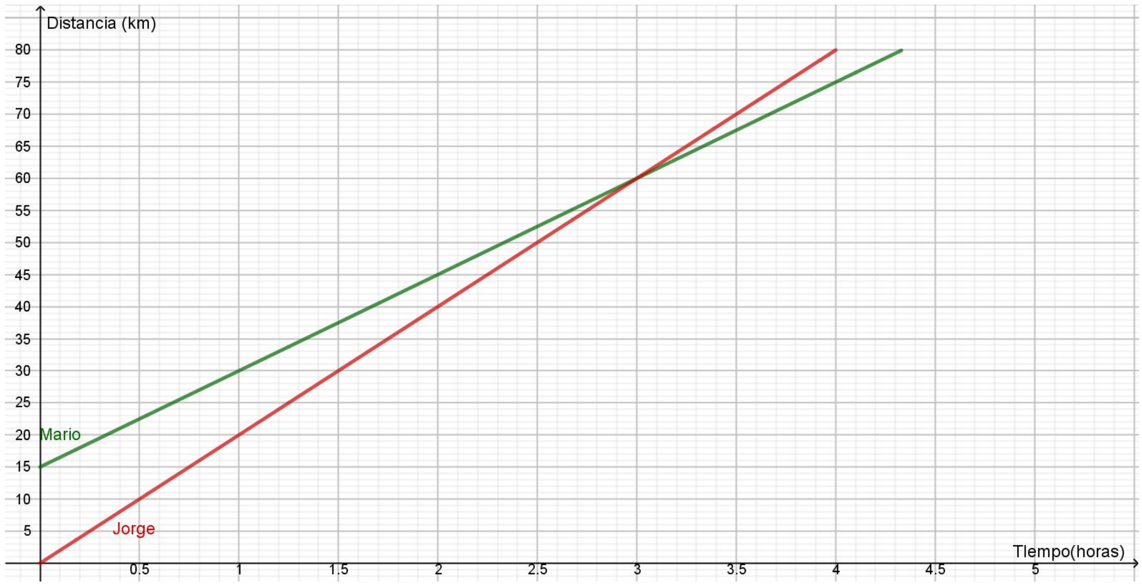
Posteriormente se recomienda definir y caracterizar otros tipos de funciones como logarítmicas, funciones definidas por tramos e introducir las funciones racionales. Es indispensable el uso del software para agilizar los aprendizajes.

Con respecto a las funciones polinómicas sería conveniente proponer tareas simples en las cuales los estudiantes logren establecer aproximaciones a las gráficas teniendo como información la expresión factorizada de las funciones.

Recomendaciones para la instancia evaluativa N ° 1

Como se espera que los estudiantes den cuenta del aprendizaje del concepto de función superando los análisis algebraicos la instancia de evaluación debe incluir, además de la manipulación algebraica y la gráfica de funciones, el análisis de situaciones problemáticas que demuestren el reconocimiento de las características relevantes de las funciones estudiadas. Un aspecto muy importante a evaluar es la interpretación de la pendiente de una función lineal. Se presentan a continuación algunas actividades que podrían estar presentes en una instancia evaluativa y que permitirían comprender el estado del aprendizaje de los estudiantes:

- Un estudiante que recorre diariamente 7 km para asistir a la universidad recuerda, después de manejar su automóvil algunos minutos, que se le ha olvidado el trabajo final que debe entregar. Manejando más rápido que de costumbre, el estudiante regresa a su casa, recoge el trabajo y de nuevo se dirige hacia la escuela. Dibuja una gráfica posible de la distancia recorrida por el estudiante desde su casa, en función del tiempo.
- La siguiente gráfica muestra la posición de dos ciclistas (Mario y Jorge) en una carrera desde un determinado momento cuando a Jorge aún le faltan 80 km para llegar a la final.



Analizando las gráficas, responde las siguientes preguntas

a)¿A qué distancia de la llegada se encuentran los dos corredores al inicio de este último tramo de la carrera?

b)¿A qué velocidad se desplaza cada competidor?

c)¿Se encuentran en algún momento ambos corredores?¿Cómo te das cuenta?

d)¿Quien gana la carrera?¿Cómo te das cuenta?

e)¿Se podría afirmar que el desplazamiento de ambos corredores podría modelarse mediante funciones lineales?¿Porqué?¿Cómo sería la expresión algebraica de esas funciones?¿Cuál el dominio e imagen de cada una?

Recomendaciones para la instancia evaluativa N ° 2

Como no es posible abordar en una instancia evaluativa tradicional todas las funciones y las relaciones entre ellas se podría solicitar como instancia evaluativa la preparación de un informe que describa las características de las funciones trigonométricas y como anexo al mismo la resolución de actividades como :

- proponer, si fuese posible, una función lineal creciente y una trigonométrica con imagen de [1,3] que no se corten en ningún punto. ¿Son las únicas que cumplen esa condición?. En el caso de no ser posible explicar porque.
- proponer, si fuese posible, una función trigonométrica que comparta el punto máximo con una función cuadrática. ¿Son las únicas dos funciones que cumplen esa condición?. En el caso de no se posible explicar porque.
- proponer, si fuera posible, una función trigonométrica seno que se superponga con otra función coseno. ¿Son las únicas dos funciones que cumplen esa condición?¿Porque?. En el caso de no ser posible explicar porque.
- proponer, si fuera posible, una función trigonométrica cuya imagen sea [2,6] y una función lineal que toque a la función trigonométrica sin atravesarla. ¿Son las únicas dos funciones que cumplen esa condición?¿Porque?. En el caso de no ser posible explicar porque.

Esta instancia evaluativa puede ser desarrollada en pequeños grupos, en forma domiciliada pero con breves espacios de trabajo aúlico que permitan un intercambio con el docente.

Tercer conjunto de actividades: Noción de límite

Objetivos:

- acercarse a una idea intuitiva de límite integrando diversos registros de representación.

Actividad N°3.1

Tiempo estimado: 2 hs cátedra.

El sonómetro es un instrumento de medida que sirve para medir niveles de presión sonora (de los que depende). En concreto, el sonómetro mide el nivel de ruido que existe en determinado lugar y en un momento dado. La unidad con la que trabaja el sonómetro es el decibelio.

Supongamos que en una ciudad en particular se establece que el máximo permitido son 85 decibeles en aquellos lugares destinados a reuniones, espectáculos, audiciones musicales y confiterías.

Un inspector llega en cierto horario a una confitería y registra los siguientes niveles de presión

Hora	Intensidad Sonora (db)
2:31:05	82,2
2:35:15	83,5
2:38:50	84,1
2:40:00	No se registraron datos
2:41:12	84,3
2:43:32	83
2:46:50	81

Por falla en el instrumento de medición no se pudo registrar la intensidad sonora a las 2:40:00, ¿qué otros datos podría haber registrado el sonómetro para garantizar que a las 2:40:00 no existió un valor superior a los 85 db?

Recomendaciones para el docente

Las actitudes de los estudiantes podrían ser variadas pero seguramente empezaran por representar esos puntos en un sistema de eje cartesianos. Es muy probable que digan que el dato que se debe agregar es que a las 2:40:00 el sonómetro debería haber marcado 85 db. Pero debemos insistir en que en ese instante no hubo registro y por lo tanto no podemos proponer datos . Es indispensable que ellos agreguen otros datos para indicar que no se superó ese valor. Los alumnos deben notar que es necesario proponer más puntos, al menos, entre 2:38:50 y 2:41:12. Cuando los estudiantes empiecen a proponer más puntos, como por ejemplo, (2:39:10, 84,3db), (2:40:50, 84,7db), el docente debe continuar proponiendo más puntos que permitirían que los decibeles sean superiores a 85 db, así obligará a los estudiantes a proponer puntos tan cercanos a 85 como se pueda.
Todos los puntos propuestos podrían ser reorganizados en una nueva tabla que prepare el camino para la introducir la definición de límite.

Tiempo (horas)	Intensidad Sonora	T- 2:40:00	I-85
2:40:00	SIN DATOS	----------------------------	---------------------------

Luego pueden responder ¿Qué condiciones tendría que cumplir esta función para garantizar que $\lim_{t \to 2:40:00} I(t) = 85$?

Actividad N°3.2

Analizar qué sucede con la función $f(x) = \frac{x^2+5x-14}{x-2}$ en x=2 y en cercanías de x=2

Recomendaciones para el docente

Luego de que los estudiantes exploren qué sucede con la función en el punto mencionado es indispensable la construcción de una tabla con valores que muestren que sucede con las imágenes de la función para valores del dominio cercanos a 2. Posteriormente es posible completar el trabajo forma de límites y continuidad.

Debido a la necesidad de profundizar en otras unidades del espacio curricular, se propone dar por finalizado lo relacionado con límite y continuidad al final del primer cuatrimestre. y se recomienda que cualquier trabajo algebraico extra o de corrección de actividades se distribuya en breves espacios de tiempo por clase.

Si el docente lo considera puede abordar la definición formal de límite ayudándose con recursos tecnológicos.

Cuarto conjunto de actividades: Nociones de cambio promedio y cambio instantáneo. La derivada como una razón de cambio. Interpretación geométrica.

Se propone a la estudiantes la resolución de las siguientes situaciones problemáticas en referencia a los ejes "Fenómenos Variacionales" y "Los conceptos centrales de derivada e integral".

Nuevamente es deseable que los estudiantes escriban las explicaciones no presentando todas las preguntas juntas, sino de una por vez.

La secuencia de actividades permite inicialmente, usando relaciones espacio - tiempo, valorar el cálculo dinámico de tasas de cambio instantáneas frente a tasas de cambio promedio que resultan limitadas para dar respuestas al análisis local de una situación. Una vez comprendidas y diferenciadas las nociones de tasa de cambio de promedio y tasa de cambio instantánea la recta tangente aparecerá como poseedora de características afines al análisis de una función en un punto. Al final de la secuencia una actividad une las nociones de función, derivada en un punto de una función y función derivada notando que f´(a) y f´(x) hablan de razones de cambio de f(x). La noción de derivada en un punto es la que cobra mayor relevancia en el marco de tareas a realizar porque, en relación a su interpretación y estimación, se realizan aproximaciones numéricas y gráficas que darán sentido a la aparición de técnicas de derivación. Así se mostrará que existen estructuras algebraicas prácticas que permiten exactitud pero que la estimación también es un camino válido a utilizar dependiendo de los recursos disponibles.

En conclusión, y en contraposición a lo que se propone en la mayoría de los libros de textos, la manipulación de expresiones simbólicas y la resolución de problemas de aplicación no constituyen el universo de aprendizajes deseables. Así esperamos que los aprendizajes, al finalizar el curso, no estén confinados a que la derivada de una función en un punto es el número que se obtiene al sustituir el punto en una expresión algebraica, obtenida a partir de manipulaciones algebraicas de otra función. Para no caer en esta banalización es necesario que el recorrido extra que planteen los docentes se vea complementado con situaciones que necesiten de f´(a) a pesar de no poder tener la expresión algebraica de f`(x) y que ese f´(a) sea acompañado de un interpretación en relación a la situación presentada. Todo este sistema didáctico dará lugar a la generalización de ideas y conceptos que se complejizarán en Problemáticas del Análisis Matemático II.

Objetivos:

Que el estudiante:

- diferencie tasa de cambio promedio de tasa de cambio instantánea.
- comprenda la derivada en un punto como una tasa de cambio instantánea a través del análisis de situaciones problemáticas y reconozca este objeto matemático en distintas circunstancias.
- diferencie derivada en un punto de derivada de una función.
- comprenda y aplique el concepto de recta tangente.

Actividad N°4.1

Tiempo estimado: 1 hs cátedra

Pablo visita a sus abuelos con frecuencia. Siempre se demora 5 hs para llega a la casa de sus abuelos, que está a 400km de su vivienda.

Los siguientes gráficos representan la distancia a la que se encuentra Pablo de su casa *d*, en función del tiempo *t*, en distintas oportunidades en que fue a visitar a sus abuelos

Gráfico I

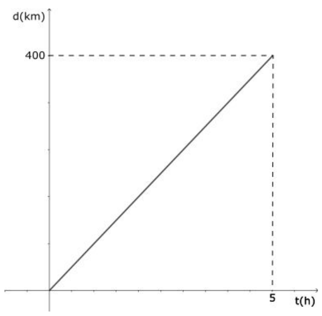


Gráfico II

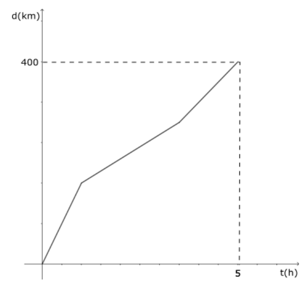


Gráfico III

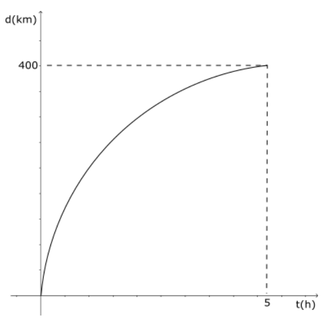
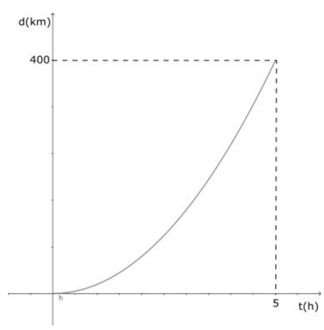


Gráfico IV



a) ¿Cuál fue la velocidad promedio en cada caso?

b) Para cada gráfico: ¿qué pueden decir acerca de la velocidad con la que viajó Pablo?¿Fue siempre a la misma velocidad??

Recomendaciones para el docente

En esta instancia puede ser necesario recordar que variables relacionan el concepto de velocidad para que los estudiantes realicen el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado para recorrerlo notando que a pesar de que la relación entre el espacio y el tiempo en las cuatro situaciones no son las mismas la velocidad promedio si es lo es.

Luego con el segundo interrogante, que no necesariamente apunta a la obtención de cantidades numéricas, los estudiantes podrían notar que las velocidades en algunos tramos resultaron constantes, y que en otros aumentó o que disminuyó. El docente podría acompañar con algunos cuestionamientos que no necesariamente deben quedar resueltos en esta instancia como: ¿en la situación II en qué tramo fue mayor la velocidad?, ¿en la situación III cómo varió la velocidad?, ¿en la situación IV reconocen algún momento en el cual la velocidad fue superior a cualquier otro momento? Así el concepto de velocidad promedio resulta ser insuficiente para dar respuesta a muchos interrogantes. También se puede acompañar los análisis preguntando qué estaría sucediendo en el velocímetro de ese vehículo en cada situación, ¿es constante?,¿aumenta?,¿disminuye?.

Actividad N°4.2

Tiempo estimado: 3 hs cátedra

1) Darío es un atleta que se entrena diariamente para competir en importantes torneos. Tiene un entrenador, Marcos, que lo ayuda a mejorar su rendimiento. En un entrenamiento en los días previos a una competencia Marcos ha registrado los siguientes tiempos y distancias :

Tiempo (segundos)	Distancia (metros)
0	0
10	58

20	120
70	403
100	555
150	781

a)Marcos piensa que tiene aplicar algunos ejercicios para mejorar el rendimiento físico del deportista porque considera que el corredor se cansa. ¿Estará en lo correcto?

b) Darío le indica que en realidad no se cansa porque notó que en los últimos 20 segundos corrió 110 metros. De ser cierta esta afirmación, ¿se modifica lo que dice el entrenador?

c) Propone más datos que permitan afirmar que el corredor no disminuye su velocidad al ir concluyendo el trayecto.

d)Revisar los procesos realizados previamente y describir qué elementos consideraron de las variables para llegar a las conclusiones. ¿Por qué todas las velocidades no resultaron ser las mismas?

e)Si la distancia que recorre el atleta al transcurrir el tiempo puede ser modelada con la expresión $e(t) =- 0.007t^2 + 6.312t - 3.566$, ¿podrían establecer la velocidad instantánea en algún momento? Escribe todos los pasos que realizaron.

Recomendaciones para el docente

Para la primera pregunta los estudiantes deberían notar que, para saber si se está cansando, el espacio recorrido debería ser menor por unidad de tiempo, para ello les servirá calcular las velocidades promedios correspondientes a los intervalos de tiempos que se presentan en la tabla para elaborar una conclusión.

Para el ítem *b* los estudiantes deberían analizar cómo esos 110 metros corridos en 20 segundos afectan las conclusiones establecidas previamente dado que al agregar ese dato en la tabla la secuencia de velocidades promedios se convierte en 5,8m/s; 6,2 m/s; 5,66 m/s; 5,06m/s; 3,86 m/s; 5,5 m/s. Definir si el corredor se cansó o no será un aspecto a discutir entre los estudiantes y el docente.

El ítem *c* es el más trabajoso e importante de esta secuencia. Por eso es necesario que se insista en la construcción de una tabla con una cantidad de valores, que al menos parezcan suficientes para indicar que el corredor no se estaría cansando. Por ejemplo la siguiente tabla mostraría una secuencia de velocidades (5m/s, 5m/s, 5,66 m/s, 6 m/s, 5,5 m/s, 6m/s, 5,33 m/s, 5,5 m/s, 6m/s) más parecida a la velocidad inicial que a los 4,52 m/s correspondientes a la velocidad promedio de los 100 a los 150 segundos marcados por el entrenador.

Tiempo (seg)	Espacio (m)
130	671
132	681
135	696
138	713
139	719
141	730
144	748
147	764
149	775
150	781

Lo más importante es no quedarse en proponer pocos pares de valores. Insistir en la elaboración de tablas en las cuales las distancias entre los tiempos se acerquen a cero para acercarse con mayor fidelidad a la velocidad real. Si los estudiantes proponen tablas más acotadas en el intervalo (130,150) como por ejemplo

Tiempo (seg)	Espacio (m)
130	671
140	726
150	781

En esa tabla las dos velocidades promedios corresponden como 5,5 m/s lo cual podría indicar que el corredor no se agota, el profesor puede proponer datos que refuten esa idea como ¿y si el corredor en los últimos 4 seg recorre sólo 16 m y no 22 m, no se estaría disminuyendo esa velocidad ? El profesor dispone de la posibilidad de multiplicar una velocidad por posibles tiempos para obtener espacios que cuestionen las propuestas de los estudiantes y los lleven a agregar valores de tiempo y espacios que no dejen margen a la posibilidad de que el corredor se canse.

También podrìa ser válido pedirles que propongan una secuencia de espacios y velocidades para los últimos 4 segundos que muestre que el corredor no se cansa y que luego completen cuál debería ser el tiempo que correspondería a esas cantidades.

Espacio (m)	Velocidades (ms/)	Tiempo (seg)
5	5,5	0,9090
4	5,8	0,6896
3	6	0,5
2	6,1	0,327
2	5,9	0,3389
3	5,6	0,53
3	5,7	0,52

Quedando entonces la tabla de espacio y tiempo para los últimos cuatro segundos como

Tiempo	Espacio
146	759
146,90	164
147,60	168
148,1	761
148,4	763
148,7	765
149,3	778
150	781

Sea cual fuera la estrategia seguida por los estudiantes en compañía de su docente lo importante, es que los estudiantes noten que las tasas de cambios promedios realizadas en ciertos intervalos de tiempo pueden nos ser suficientes para describir la realidad de ese intervalo y que sólo las velocidades instantáneas brindan información acerca de una velocidad en determinado momento. Otra característica que debe ser fortalecida en el recorrido de esta tarea es que a esas velocidades instantáneas sólo nos podemos aproximar si la diferencia entre los dos tiempos considerados se acercan a cero.

Ésta construcciòn de tablas, argumentos y justificaciones no se realiza de un instante a otro, a este conocimiento los estudiantes sólo pueden acercarse si el docente ofrece tiempo suficiente e intervenciones que provoquen los cuestionamiento invitando a una progresión de avances de ideas. Es tarea del estudiante ejercer un rol activo proponiendo estrategias y es función del docente establecer un marco de cuestionamiento de esas formas de trabajo estimulada a través de un intenso ida y vuelta de preguntas y propuestas que desemboquen en el conocimiento deseado.

Con respecto a la última pregunta se busca que los estudiantes logren visualizar que para conocer qué pasa con la velocidad en un determinado instante deben saber cuál fue el espacio recorrido en una variación de tiempo pequeña. Entonces el docente, puede solicitar que propongan dos valores para t, que posibiliten el cálculo de una velocidad instantánea. Los estudiantes seguramente notan que los dos valores de t deben ser cercanos, sin embargo la idea de “cercanía” que necesitamos trabajar para significar el concepto abstracto de derivada debe permitir pensar en una distancia entre los dos valores de t tendiente a 0. Entonces, si un estudiante dice que para saber la velocidad a los 12 seg, tomará t=12 y t=13, el docente debe cuestionarle si ese segundo de variación corresponderá con la idea de instantáneo o sino sería mejor considerar t=12 y, por ejemplo, t=12,01 haciendo que $\triangle t$ se acerque a cero. Así podrían estimar la velocidad instantánea de manera numérica a los 12 segundos, realizando el cociente incremental entre $\triangle e$ y $\triangle t$.

Es importante que los estudiantes visualicen los “pasos” que les permitirían realizar la estimación de esta tasa de cambio instantánea y que las apliquen buscando esclarecer, por ejemplo, la pregunta inicial relacionada las habilidades deportivas del corredor.

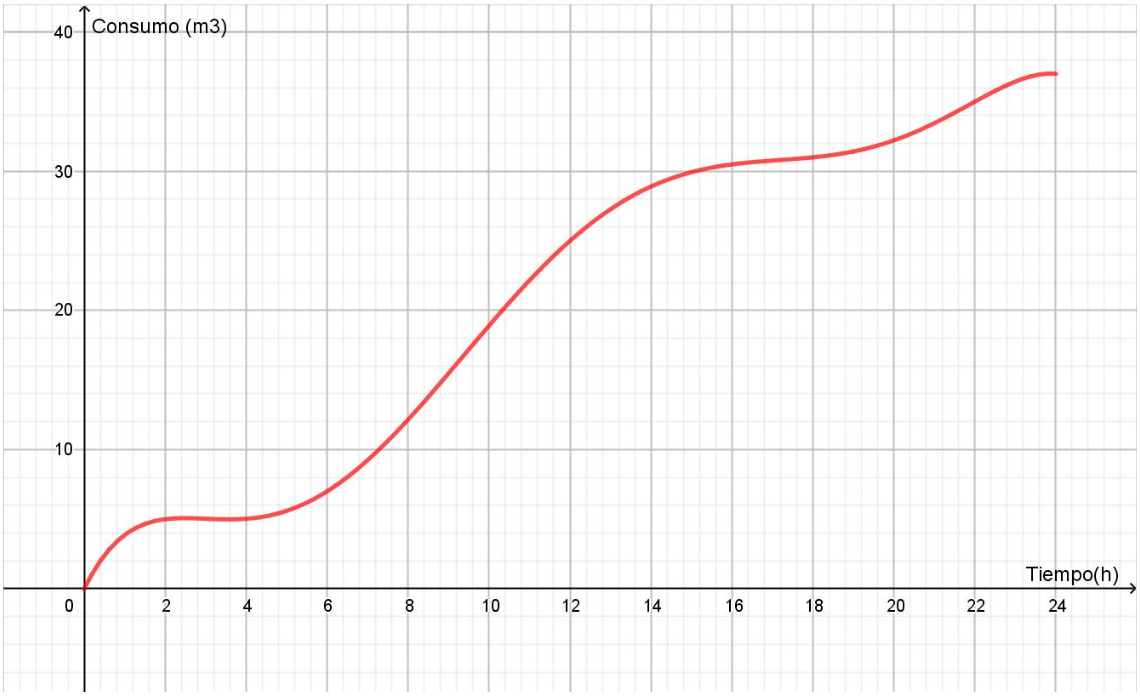
Así por ejemplo se puede comenzar con algunas ideas rudimentarias como velocidad instantánea del corredor a los 149 segundos $\frac{\triangle e}{\triangle t} = \frac{e(149{,}01)-e(149)}{149{,}01-149}$

Es un momento propicio para establecer definiciones acordes al nivel de formación de los estudiantes, y que permitan avanzar luego con otras definiciones más abstracta conviene definir velocidad promedio y diferenciarla de velocidad instantánea.

Actividad N°4.3

Tiempo estimado: 4 hs cátedra

Un hotel tiene 156 habitaciones. Su consumo de agua caliente es bastante elevado. La función que relaciona la cantidad total de agua consumida desde la medianoche (0 horas) hasta las *t* horas.se muestra en la siguiente gráfica.



a. ¿Cuál fue el consumo total de agua a lo largo del día?

NOTA: seguramente no habrá inconvenientes, los estudiantes de sólo observar el gráfico responderán que a las 24 horas el agua caliente total consumida es aproximadamente 37,5m3. Es importante insistir que se trata de la variable agua caliente total consumida

b. ¿Qué es mayor, la cantidad de agua caliente que se estaba consumiendo a las 9 horas o la que se estaba consumiendo a las 14 horas?

c. ¿Cuándo crees que se estaba consumiendo más agua caliente? Justifica la respuesta.

d. ¿Cuánta agua se está consumiendo a las 7:00, en qué unidades se medirá esto?

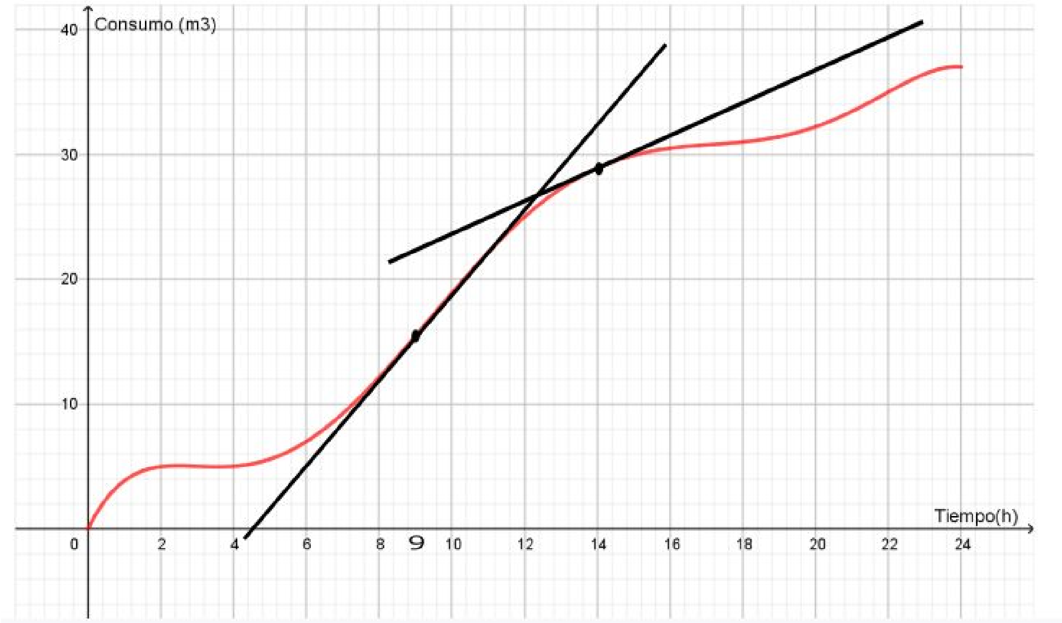
e. ¿Qué es lo nuevo que aprendiste?¿Qué actividad te pareció más fácil y cuál más difícil?

Recomendaciones para el docente

Con respecto al ítem b puede suceder que en una primera impresión los estudiantes indiquen un consumo mayor a las 14 horas debido a que la imagen de t=14 es superior a la imagen de t=9, es necesario entonces proponer una serie de preguntas que los orienten a pensar que la pregunta hace referencia a la tasa de consumo en ambos momentos. Podría el docente hacer algunas preguntas como, ¿cómo describirían la cantidad de agua se está consumiendo en este momento en esta institución?, los estudiantes pueden llegar emitir una cantidad asociada a un volumen, como 20 m^3 o 50 litros, pero el docente podría preguntar ¿esa cantidad sería por minuto, por segundo por hora o por día?. Luego de la visualización de que el número que va a permitir elegir entre las 9 o las 14 hs es una tasa de cambio, habría que ver cómo construir esa tasa de cambio. ¿Cómo podríamos aproximarnos a la variación del consumo de agua en esos instantes?.

El camino que los estudiantes pueden seguir implica recuperar lo aprendido en la situación problemática anterior, buscando estimar el cociente variacional $\Delta C/\Delta t$ a partir de posibles pares ordenados estimados de la gráfica. Algunos estudiantes usarán C(9) con C(10) o C(9) con C(9,6).También es posible el uso de C(8,4) y C(9) o C(8,8) y C(9). En todos estos casos las aproximaciones se acercarán a un mismo valor. Aquí el docente debe consultar, si que es los estudiantes no lo dijeron previamente, si estas tasas de cambio que se están aproximando no representan algún elemento de una función ya trabajada previamente. Cuando los estudiantes hablen de la pendiente de una función lineal o la pendiente de una recta, se puede trazar una aproximaciòn a la recta tangente en 9 explicando a los estudiantes como se llama este objeto matemático y qué características tiene. Es valorable que los estudiantes también dejen trazado su estimación de pendiente de recta tangente y que el docente observe esas aproximaciones para observar cómo están trazando esas rectas y que todos lleguen a una aproximación satisfactoria. En paralelo el docente puede solicitar la estimación manual del consumo a las 14 hs, y el trazado de una aproximación a la recta tangente en t=14. Así el estudiante puede visualizar la conexión entre la tasa de cambio instantánea y una recta trazada a partir de un punto que cumple características muy particulares. Algunas particularidades importantes que pueden surgir de la estimación de las dos tasas de cambio realizadas por los estudiantes y de la visualización de las rectas tangentes aproximadas por el docente es la relación entre ese número y la inclinación de las rectas. Debería surgir el debate acerca de qué sucede cuando la inclinación de la recta se parece o superpone a la curva y que elementos hablarían de una recta tangente en un punto de una curva incorrecta. Que los estudiantes emitan estos juicios y discutan aspectos relevantes de esta recta son indispensables para no caer en la equivocada definición de que la recta tangente es la recta que corta a la función en un sólo punto y que difiere de la verdadera relación entre esa recta y la derivada de una función en un punto.

A continuación se muestra una estimación de esas rectas tangentes en esos puntos.



Por otro lado, con respecto al ítem *c* el sentido de la actividad no es encontrar el momento exacto con en el cual se está consumiendo más agua caliente, sino una posible aproximación que no viene dada de cálculos numéricos. Es posible que los estudiantes indiquen que no se puede conocer ese momento por que no es posible calcular infinitas tasas de cambios, sin embargo si eso sucede el docente debe interrogar acerca de la característica que tendría la recta tangente que pasa por un punto, en comparación con todas las otras rectas tangentes que se podrían trazar. Así se espera que surja la idea de que aquella que tenga mayor inclinación será la que posea mayor pendiente y por lo tanto mayor tasa de consumo de agua caliente. Recordemos que todas las conclusiones que se realizan referencian a valores aproximados, justamente el sentido de ello es que primero acerquemos a los estudiantes a un conjunto de ideas, bastante complejas y amplias, que rondan a la "derivada" otorgándole un sentido que no se logra por la sola aplicación de definiciones y técnicas. Así algunos estudiantes ayudados con la regla pueden trazar aquella recta tangente que crean que más inclinada puede estar. Así para algunos estudiantes la mayor inclinación corresponderá a la recta que pasa cercana a las 0 hs, mientras que otros podrían argumentar que se encuentran alrededor de las 10 de la mañana.

Actividad N°4.4

Tiempo estimado: 2 hs cátedra

Una fábrica dispone de un sistema que renueva el agua de una pileta constantemente. La cantidad l de litros disponibles en la pileta al transcurrir el tiempo a partir de las 8:00 am viene dada por la expresión $l(t) = -20t^2 + 1200t + 0.605$, con t en minutos.

a) Estimar la velocidad instantánea (derivada) en tres momentos diferentes. Explica en el contexto del problema el significado de esas pendientes y luego, usando esas velocidades instantáneas como pendientes, estimar la recta que pasa por esos puntos.

b) Representa en Geogebra la función $l(t)$ como así también las tres rectas estimadas y observa qué sucede con la parábola y con las rectas propuestas. Describe todas las relaciones que encuentres

Recomendación para el docente

Para responder la primera pregunta los estudiantes deberían aprovechar que se otorga la expresión algebraica de la función y calcular la derivada en un punto mediante estimaciones numéricas. Luego pueden usar la derivada como la pendiente de la recta que pasa por esos puntos y calcular algebraicamente esas rectas tangentes.

Finalmente el uso de Geogebra busca que los estudiantes usen un recurso tecnológico para calcular derivadas de manera más precisa y rápida que las estimaciones manuales. A su vez se espera aborden más conclusiones en relación al signo de la derivada, si la recta tangente crece o decrece o que sucede con la derivada cuando la recta tangente es paralela al eje de las absisas. Si bien algunas de esas relaciones ya fueron abordadas es válida en esta instancia de refuerzo para retomar expresiones y volver a construir conclusiones que tienen una importancia tan notable en los abordajes posteriores del análisis matemático.

Actividad N°4.5

Tiempo estimado: 2 hs cátedra

Retomar la situación de Marcos, el atleta, en el cual el espacio recorrido estaba modelado por la expresión $e(t) = -0.007t^2 + 6.312t - 3.566$ .y comprobar si la expresión $v(t) = -0.014t + 6.312$ tiene como imágenes las velocidades instantáneas de $e(t)$.

Recomendaciones para el docente

Se espera que los estudiantes utilicen Geogebra y obtengan rápidamente las derivadas en distintos puntos de la función $e(t)$ (obteniendo la expresión de la recta tangente en distintos puntos) y lo comparen con las imágenes en esos puntos de $v(t)$. Se recomienda construir tablas de datos usando la simbología adecuada. Luego se puede ampliar el concepto de derivada, para hablar de derivada de una función usando $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. También se puede realizar este límite para la función $e(t)$ y comprobar que $e'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{e(t+h)-e(t)}{h} = v(t)$.

Posteriormente se puede pedir el cálculo de la función derivada a través del cálculo de límites de funciones simples e introducir técnicas de derivación. También se recomienda elaborar una guía de trabajo práctica que afiance el trabajo algebraico y que se vaya trabajando en breves espacios de tiempo por clase mientras se continúa con la resolución de situaciones problemáticas.

Actividad N°4.6

Tiempo estimado: 4 hs cátedra

El nivel de agua en cualquier dique es motivo de preocupación de diferentes actores institucionales dadas las consecuencias sociales y económicas que pueden implicar que los niveles de los mismos sean altos o bajos. Tal es así que la Subsecretaría de Recursos Hídricos publica a diario en http://www.cba.gov.ar/nivel-de-diques-y-embalses/ a altura a la que se encuentra cada represa de nuestra provincia.

Al considerar la rapidez de cambio del nivel de agua al transcurrir los días de un mes en un dique se registra la siguiente información

Tiempo (días)	Tasa de cambio instantánea Del Nivel de Agua $\Delta N / \Delta t$ (m/d)
1	0,01
2,45	0
4,5	-0,02
12,2	-0,05
22	0
30	0,11

a) ¿Qué crees que sucedió hasta el momento t=2,45 de la investigación con el nivel de agua de ese dique?¿Cómo te das cuenta?¿Sería válido simbolizar ese momento como $N'(2,45)=0$, siendo N el nivel del dique medido en metros, y t el tiempo transcurrido en días?. Explica qué significa $N'(2,45)=0$

b) ¿Podrías indicar y justificar en qué momento el nivel de agua contenido en ese dique podría ser mínimo? Describe las diferencias que encuentras entre $N'(4,5)$ y $N'(12,2)$.

c) Indica posibles valores de de $N'(t)$ para que $N'(22)$ sea un máximo.

d) Retomando la tabla esboza una posible gráfica de la función $N(t)$ donde N representa el nivel del dique, medido en metros, y t son los días transcurridos a partir del primer día del mes. (Suponga que los únicos máximos o mínimos de $N(t)$ se producen en $t=2,45$ y $t=22$)

e) Analiza las gráficas elaboradas por algunos de tus compañeros, ¿son iguales?, ¿qué otra información necesitarías para realizar una gráfica más representativa de la situación problemática?

f) Explica todas los posibles fenómenos que pueden ocurrir con la tasa de cambio instantánea del nivel del dique si para dos momentos distintos, la altura del dique es la misma. Ejemplifica.

Recomendaciones para el docente

Con respecto a la primer pregunta se espera que puedan indicar, usando la única tasa de cambio previa a t=2,45, que hasta ese momento el nivel del agua ha ido en aumento porque el 0,01 m/d es positivo. Luego pueden conectar las expresiones simbólicas con las asociaciones coloquiales de derivada ya trabajadas como así también que mencionar que si una derivada es cero no hay variación, es decir que en t=2,45 el nivel del agua no está ni subiendo ni bajando.

Al trabajar el ítem *b* se busca que los estudiantes, siguiendo la lógica del análisis del signo de la derivada en relación con el crecimiento o no del nivel del agua, pueden llegar a establecer un posible mínimo (t=22) notando que en determinados intervalos el nivel del agua desciende y luego asciende.

Para la tercera pregunta los estudiantes visualizarán que en ambos casos el nivel del agua está en descenso, pero en un instante (*t=12,2*) el ritmo de decrecimiento es mayor que en el otro instante.

En el ítem *d* los estudiantes van a crear una nueva tabla de datos, agregando valores de t y de $\Delta N/\Delta t$ que, sin modificar los datos ya presentados, transformen a t=22 de mínimo a máximo.

Para responder la última pregunta los estudiantes realizarán una aproximación a la representación gráfica del nivel de agua del dique. Las aproximaciones tendrán diferencias, sin embargo los momentos en los cuales la función presenta máximos y mínimos serán iguales. Seguramente ellos expresarán que no disponen de toda la cantidad de información para realizar la gráfica exacta, lo que el docente puede aprovechar para indagar qué información creen que necesitarían y si es posible extraerla de la información presentada.

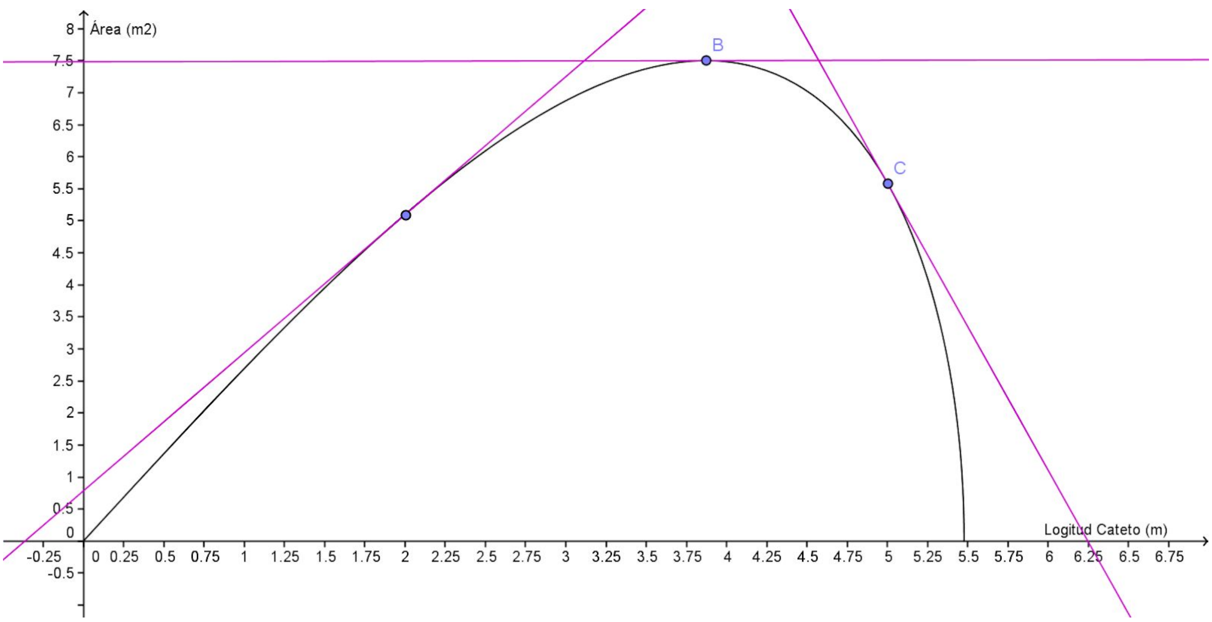
En general y como en todo el resto de las instancias se esperan momentos de socialización de las reflexiones y conclusiones de los estudiantes. Además es conveniente la introducción y demostración del Teorema de Rolle, el Teorema del Valor Intermedio y todas las propiedades que permiten el análisis de una función en términos del análisis de la derivada.

Tarea para el docente a cargo del espacio curricular: ¿cómo abordaría la problemática de los “puntos” angulosos y la existencia de la derivada

Recomendación para la instancia evaluativa

Las tareas a desarrollar en relación al concepto de derivada en este espacio curricular deben incluir el cálculo de derivadas simples a través de estimaciones numéricas o gráficas, la aplicación de la definición de límite y el empleo de técnicas de derivación. A su vez la interpretación en términos verbales y geométricos debe ser el sentido que guíe la formulación de cualquier tarea. No se espera que en este espacio curricular se aborden en su totalidad los problemas de optimización, como tampoco se desea que grafiquen funciones a partir de su expresión algebraica pero si es indispensable que los estudiantes interpreten razones incrementales en variados ámbitos (intra y extra matemáticos).. Por ello una evaluación en estos términos de comprensión deben involucrar la resolución de situaciones como:

- Una persona dispone de 5 metros y medio de tejido para cercar una huerta en su patio. Piensa realizarla de forma triangular aprovechando una esquina recta, usando las paredes como catetos, y los 30,25 metros de tejido como el lado restante del triángulo. A continuación se muestra el gráfico que relaciona el área de la huerta triangular con la longitud de unos de sus catetos y tres rectas tangentes.



1) Estima las pendientes y ordenadas al origen de las tres rectas tangentes graficadas.
2) ¿Qué significado tienen las pendientes de esas rectas tangentes en el contexto del problema?.¿Con qué objeto matemático podrían representarse?
3) ¿Para qué longitudes de los catetos se podría obtener el área máxima para la huerta?
4) Calcula a través de métodos algebraicos alguna de las las rectas tangentes presentadas en el gráfico.

- Se quiere construir una piscina con forma de paralelepípedo de base cuadrada. Si se disponen de $192m^2$ de baldosas para cubrir las cuatro paredes y el fondo de la piscina, algunas de las rectas tangentes a la función Volumen de la piscina se presentan en la siguiente tabla

x: longitud de la base de la piscina (m)	*Rectas tangentes al Volumen de la piscina en x*
2	$RV_2 = 45x + 4$
4	$RV_4 = 35.97x + 32.11$
6	$RV_6 = 21x + 107.8$
8	$RV_8 = 256$
10	$RV_{10} =- 27x + 500.19$
12	$RV_{12} =- 60x + 863.86$

Responder:

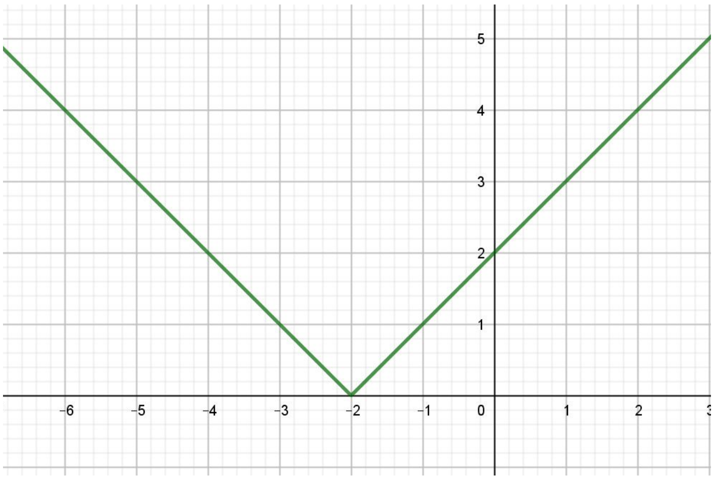
a)¿Cuánto vale *V´(2) y V´(10)*?¿Qué significado tiene esas derivadas en el contexto del problema?

b)¿Cuál sería el volumen de la pileta si se toma como base de la pileta una longitud de 4m?¿Y si la base es 12 m?

c)¿Cuál es volumen máximo que podría contener la pileta?¿Para qué dimensiones se producen?

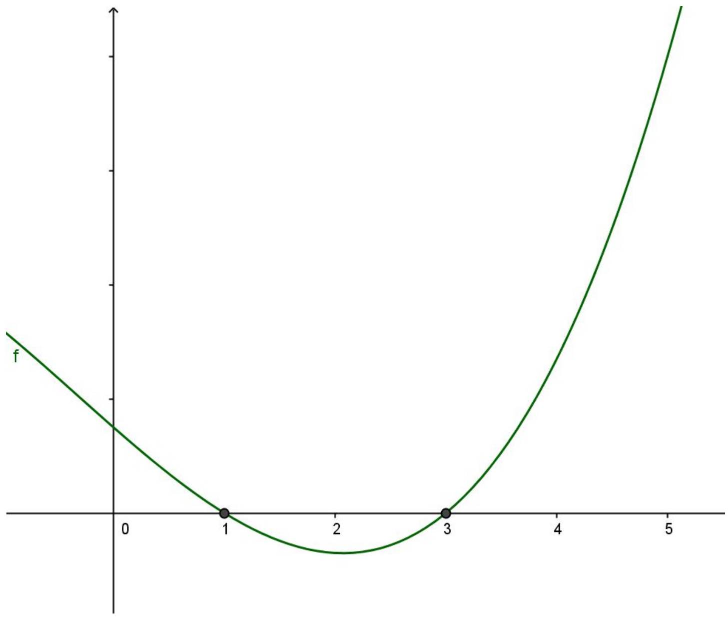
d)Utiliza métodos algebraicos para conocer otras dos rectas tangentes a la función.

- Indicar Verdadero o Falso y justificar “la función representada en la siguiente gráfica no es derivable”



- Dibujen el gráfico de una función f(x) que verifique las siguientes condiciones: la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto de abscisa -2 es horizontal, la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto de abscisa 5 es paralela a la recta y=x, y f(x) no es derivable en 0.

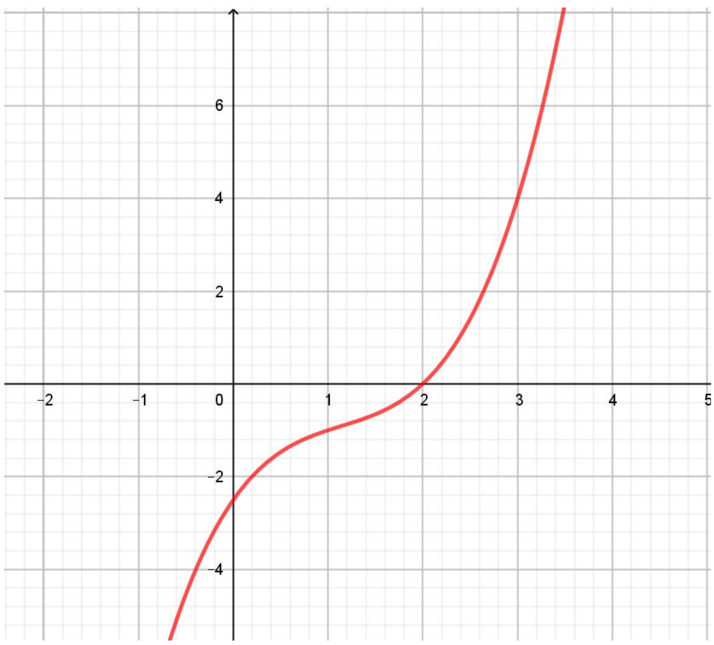
- Aplique los teoremas trabajados en clase para explicar sin graficar porque las función $f(x) = x^5 + 2x$ no tiene máximos ni mínimos
- Analice la derivabilidad de la función $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$ en todo su dominio. Justifique a través de los teoremas planteados las conclusiones arribadas.
- El gráfico que se muestra a continuación corresponde a la función derivada de una función f(x)



a)Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). Justificar.

b)Los valores de x en los cuales la función f(x) tienen máximos o mínimos. Justificar

- El gráfico de la función derivada de una función f(x) es el siguiente:



Observando el gráfico, decidan si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifiquen sus respuestas.

a)La función f(x) es creciente en en R

b)En $x=2$, la función tiene un mínimo relativo.

Quinto conjunto de actividades: introducción a las integrales.

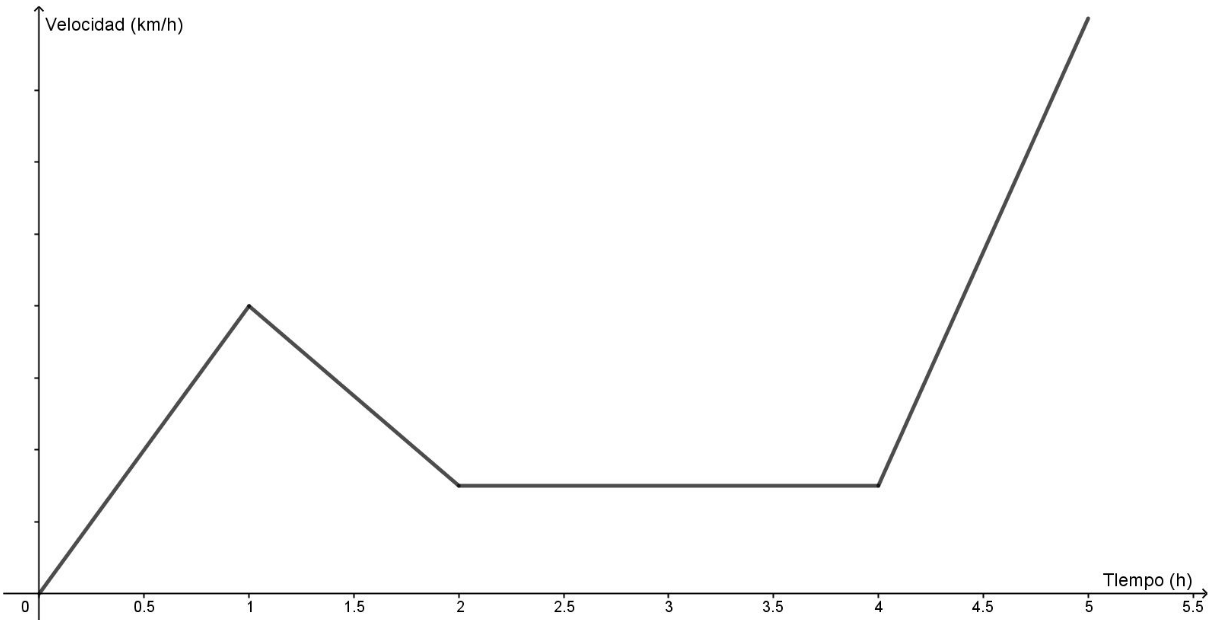
Objetivo

Que el estudiante realice estimaciones de áreas bajo una curva en situaciones problemáticas mediante sumas superiores e inferiores pero abordando la necesidad de usar métodos algebraicos más exactos.

Actividad N°5.1

Tiempo estimado: 6 horas cátedra

La siguiente gráfica muestra la velocidad que lleva un vehículo en un cierto viaje al transcurrir el tiempo. ¿En algún momento el vehículo dejó de recorrer espacio? ¿Cómo se dan cuenta de esta situación?



Recomendación para el docente.

Como el gráfico no tiene valores numéricos de la variable dependiente obliga a los estudiantes a reflexionar en lo que significa realmente variaciones en la velocidad del vehículo en relación a otra variable, el espacio recorrido. Es muy importante que se escuchen e interpelen las afirmaciones de los estudiantes revisando particularmente expresiones como “el vehículo se detuvo” apelando a estudiar que implica que la velocidad disminuya o que se mantenga constante.

Actividad N°5.2

Situación a presentar

El ANMAT, que es la Administración Nacional de Medicamentos Alimentos y tecnología médica, es el organismo encargado, entre otras cosas, de establecer cómo deben proceder los agentes intervinientes en el proceso de elaboración y comercialización de alimentos, como así también determinar los límites microbiológicos de presencia de bacterias. En particular para los alimentos categorizados en chacinados no embutidos y embutidos el límite máximo de la presencia de Escherichia Coli en una muestra de características particulares es de 100 células.

El resultado de un análisis realizado a un producto embutido se presenta en el siguiente gráfico:

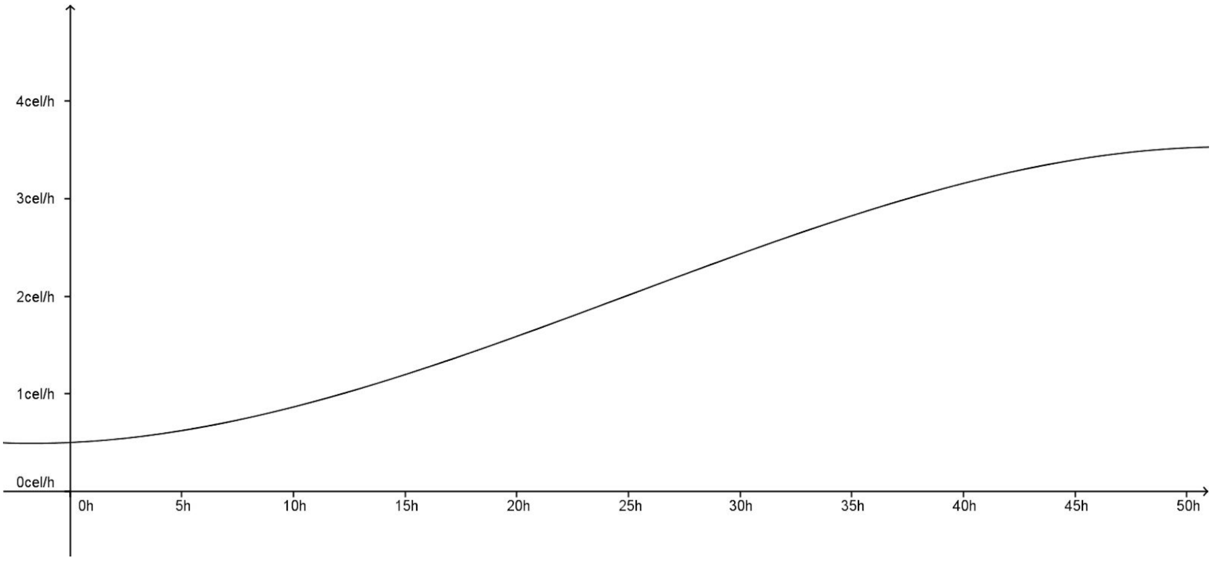


Gráfico N° 1: Velocidad de Crecimiento Celular de Escherichia Colli en un embutido

a. ¿Creen que este lote de alimentos embutidos sería apto para la comercialización a las 50 hs?¿Por qué?

Recomendaciones para el docente

Las respuestas de los estudiantes podrían pertenecer a dos grandes grupos, los que contesten que el alimento es comercializable y aquellos que digan que el alimento no cumple con las especificaciones de comercialización de la ANMAT.

El docente deberá analizar los procedimientos que realizó cada grupo y ponerlos a consideración del resto de sus compañeros. Discutir acerca de la cantidad de particiones

que realizaron, si usaron rectángulos, triángulos o trapecios para los cálculos, si usaron velocidades iniciales o finales como altura de las figuras son indispensables para avanzar hacia la formalización del concepto de integral definida.
También se podrá preguntar ¿el cálculo estimado será mayor o menor que el real?¿Qué hubiese sucedido si se consideran infinitésimos como base de las figuras?
Es conveniente en pos de las actividades que se trabajarán en Problemáticas del Análisis Matemático II que queden registradas tablas de cantidad de células estimadas en distintos momentos, con distintas particiones y diferenciando sumas superiores de sumas inferiores.
Si bien la respuesta con respecto a la posibilidad de comercializar o no el alimento quedará inconclusa porque las sumas inferiores dan un resultado menor a 100 células y las superiores mayores a 100, el docente puede aprovechar para conceptualizar matemáticamente lo que están tratando de calcular y avanzar en la simbología apropiada del concepto integral definida.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Altman, S; Comparatore, C y Kurzrok, L. (2001). *Análisis 2*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Longseller S.A.

Azcárate, C & Deulofeo,J.(1999). *Funciones y gráficas. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. España: Editorial: síntesis.

Badillo Jimenez, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra, España.

De Guzman, M & otros. (1988). *Matemáticas 3 Bachillerato*. Madrid, España: Editorial ANAYA

Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (2014). *Matemática. Función Cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*. Disponible enhttp://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/matematica-cuadratica.pdf

Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. (2014). Diseño curricular. *Profesorado de Educación Secundaria en Matemática*. Recuperado de https://dges-cba.infd.edu.ar/sitio/upload/DCurricular_Matem-_2015.pdf.

Larson, R; Hostejler, R y Edwards, B. (2006). *Cálculo I*. Octava Edición. México D.F.,México: Editorial Mc. Graw Hill

Salinas, P. & Alanis, J. A. (2009) *Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12(3), 355-382.

---

[i] Equipo de trabajo:Viviana Audisio – Pamela Chirino – Nicolás Gerez Cuevas – Héctor Gramaglia – Natalia Heredia – Fernanda Viola.

Contacto: vgaudisio@gmail.com